Ano lectivo 2002/03 **Exame de Geometria Diferencial**

25/6/03

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Considere a curva $\gamma_{r,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\gamma_{r,a}(s) = \left(r\cos\frac{s}{b}, r\sin\frac{s}{b}, a\frac{s}{b}\right),$$
onde $b = \sqrt{r^2 + a^2}$.
   (a) Determine a curvatura e a torsão de $\gamma_{r,a}$.
   (b) Mostre que as rectas normais a $\gamma_{r,a}$ são ortogonais ao eixo OZ.
   (c) Mostre que o ângulo definido pelo eixo OZ e pela recta tangente a $\gamma_{r,a}$ em cada $\gamma_{r,a}(s)$ é constante.

2. Considere, para cada $a \in \mathbb{R}$, a curva
$$\begin{array}{rccc} \gamma_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t, e^{at}). \end{array}$$
   (a) Verifique que, se $a < 0$, γ_a tem comprimento finito em $[0, +\infty[$ e calcule-o.
   (b) Para que valores de a é que γ_a não está parametrizada por comprimento de arco? Para esses valores, determine uma reparametrização por comprimento de arco de γ_a.

3. (a) Enuncie o Teorema Fundamental das Curvas.
   (b) Determine as curvas $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, parametrizadas por comprimento de arco, que têm curvatura constante e torsão constante.

4. Indique, sem justificação, um exemplo de:
   (a) duas hélices generalizadas.
   (b) uma superfície não orientável.
   (c) duas quádricas que sejam superfícies de revolução.
   (d) uma superfície regrada.

5. Sendo $p(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ $(a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R})$ um polinómio arbitrário de grau 2 nas duas variáveis x e y, considere
$$S_p = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = p(x,y)\}.$$
   (a) Mostre que S_p é uma superfície.
   (b) Prove que, para cada p, todos os pontos de S_p são elípticos ou todos os pontos de S_p são hiperbólicos ou todos os pontos de S_p são planares ou parabólicos.
   Para que polinómios p é que os pontos de S_p são todos elípticos? E hiperbólicos?

(v.s.f.f.)

6. Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

e seja $g : S_1 \to S_2$ definida por

$$g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z).$$

(a) Prove que g é uma isometria.

(b) Sabendo que o caminho mais curto em S_2 entre os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -3)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 4)$ define uma curva (regular) determine:

(i) o comprimento desse caminho;

(ii) esse caminho.