Ano lectivo 2002/03 **Exame de Geometria Diferencial**

15/7/03

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

---

1. Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a curva definida por $\gamma(t) = (\cos t, t, 1 - t^3)$. Calcule o seu triedro de Frenet-Serret e averigue se se trata de uma curva plana.

2. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) A curva $\gamma :]0, \pi[\to \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, é regular.

   (b) Para qualquer curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, e para qualquer $t \in I$, $(\gamma''(t)|\gamma'(t)) = 0$.

   (c) Toda a curva plana é uma hélice generalizada.

   (d) Todo o difeomorfismo equiareal é uma isometria.

3. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja imagem está contida numa esfera de raio r e centro c. Prove que:

   (a) A curvatura κ de γ nunca se anula;

   (b) Se a torsão τ de γ nunca se anula então, para cada $s \in I$, tem-se (denotando $1/\kappa(s)$ por $\rho(s)$ e $1/\tau(s)$ por $\sigma(s)$):

      (i) $\gamma(s) - c = -\rho(s)N(s) - \rho'(s)\sigma(s)B(s)$.

      (ii) $r^2 = \rho(s)^2 + (\rho'(s)\sigma(s))^2$.

4. (a) Quando é que um difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$ entre superfícies se diz uma isometria?

   (b) Considere as superfícies

   $$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\},\ S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

   e o difeomorfismo $g : S_1 \to S_2$ definido por $g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z)$.

      (i) Prove que g é uma isometria.

      (ii) Determine a área do triângulo em S_2 de vértices $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(0, 1, 2)$.

5. (a) Como se classificam os pontos de uma superfície relativamente às curvaturas gaussiana e média?

   (b) Seja $\mathcal{R}$ uma superfície de revolução, com eixo de revolução OZ e geratriz dada por $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$. Prove que cada ponto p de $\mathcal{R}$, obtido por rotação de ângulo v de algum ponto da geratriz, tem vector de posição $\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$.

   (c) Considere a superfície S obtida por rotação em torno do eixo OZ da curva $\gamma(t) = (t, 0, (t-1)^3)$, $t \in]0, 2[$. Mostre que $(1, 0, 0)$ é um ponto planar de S.
