Ano lectivo 2003/04

Exame de Geometria Diferencial

29/6/04

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

---

1. Considere a espiral logarítmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.
   (a) Calcule o comprimento de arco de γ entre os pontos $(1,0)$ e $(-e^{3\pi}, 0)$.
   (b) Mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vector tangente em $\gamma(t)$ é constante, igual a 45°.
   (c) Determine uma reparametrização por comprimento de arco de γ.

2. (a) Enuncie o Teorema Fundamental das Curvas Planas.
   (b) Determine as curvas $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, parametrizadas por comprimento de arco, que têm curvatura constante.

3. Diga, justificando sucintamente a sua resposta, quais das seguintes proposições são verdadeiras ou falsas.

   (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) Qualquer reparametrização de uma curva regular é regular.
   (b) A curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (t, t^3, 2t)$ é uma hélice generalizada.
   (c) Toda a aplicação equiareal é uma isometria.
   (d) A esfera S^2 contém pontos hiperbólicos.

4. (a) Quando é que se diz que um vector $v \in \mathbb{R}^3$ é tangente a uma superfície S no ponto $p \in S$?
   (b) Seja $S_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = c\}$ (onde $c \in \mathbb{R}$).
      (i) Mostre que S_c é uma superfície para $c \neq 0$.
      (ii) Determine o plano tangente a S_1 no ponto $p = (1,1,0)$.

5. Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \Pi \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sigma^{-1}(x,y,z), 0) \end{array}$$

   na superfície plana $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U, z = 0\}$ é conformal.

   (a) Mostre que o mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.
   (b) Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função suave e seja

$$\sigma(u,v) = (u \cos v, u \sin v, g(u)), \qquad u \in \mathbb{R}^+, v \in (0, 2\pi)$$

   uma parametrização da superfície de revolução obtida rodando a curva $z = g(x)$, no plano XOZ, em torno do eixo OZ. Determine todas as funções g para as quais σ é conformal.
