Ano lectivo 2003/04 **Exame de Geometria Diferencial**

13/7/04

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

---

1. Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a curva definida por $\gamma(t) = (e^t, t^2, 5+t)$. Calcule o seu triedro de Frenet-Serret e averigue se se trata de uma curva plana.

2. Indique, sem justificação, um exemplo de:

   (a) duas hélices generalizadas.

   (b) uma curva com curvatura constante 1/2 e torsão constante 1/2.

   (c) uma superfície onde todos os pontos são parabólicos.

3. Diga, justificando sucintamente a sua resposta, quais das seguintes proposições são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$ é uma circunferência de raio 1.

   (b) Se uma curva possui uma reparametrização por comprimento de arco então é regular.

   (c) A superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ contém pontos de qualquer um dos quatro tipos (planares, elípticos, parabólicos e hiperbólicos).

   (d) Todo o ponto umbilical é planar ou elíptico.

4. (a) Seja S uma superfície. Quando é que se diz que um vector $v \in \mathbb{R}^3$ é tangente a S?

   (b) Prove que o conjunto dos vectores tangentes a S num ponto $p \in S$ forma um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 (e determine uma base desse subespaço).

5. Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \Pi \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sigma^{-1}(x,y,z), 0) \end{array}$$

   na superfície plana $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U, z = 0\}$ é conformal.

   (a) Mostre que o mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

   (b) Seja

$$\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\delta(u),$$

   onde $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco e $\delta(u)$ é um vector unitário para cada $u \in I$, uma parametrização de uma superfície regrada. Mostre que σ é conformal se e só se $\delta(u)$ é independente de u e o traço de γ está contido num plano perpendicular a δ. Que tipo de superfície regrada é esta?
