Ano lectivo 2004/05 **Exame de Geometria Diferencial**

6/7/05

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m Soluções

---

1. Considere a *espiral logaritmica*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (e^t \cos t, e^t \sin t). \end{array}$$

   (a) Calcule o comprimento de γ em $[0, 2\pi]$.

   (b) Determine uma reparametrização de γ por comprimento de arco.

   (c) Prove que o ângulo entre γ e o seu vector tangente é constante. Quanto mede esse ângulo?

2. Seja a uma constante não nula. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não constante, tal que as normais principais à curva $\gamma : t \longmapsto (a \cos t, a \sin t, \varphi(t))$ sejam paralelas ao plano $z = 0$.

3. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

   (a) Toda a curva plana é uma hélice generalizada.

   (b) Seja γ uma curva parametrizada por comprimento de arco e com curvatura constante. A curva α definida por $\alpha(s) = \int_0^s B_\gamma(u)\, du$ é uma curva de torsão constante.

   (c) Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice generalizada (cuja curvatura nunca se anula) então o quociente $\tau_\gamma(t)/\kappa_\gamma(t)$ é constante ao longo de $t \in I$.

   (d) Todo o difeomorfismo equiareal é uma isometria.

4. (a) Seja $S = f^{-1}(a)$ uma superfície, onde $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação C^∞ e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, e seja p um ponto de S. Deduza uma equação para o plano tangente a S em p em termos do gradiente $\nabla f(p)$ de f em p.

   (b) Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid yx^2 + y^2 = 1\}$.

      (i) Justifique que C é uma superfície.

      (ii) Determine uma equação para o plano tangente a C em $p = (0, 1, 2)$.

5. (a) Determine a segunda forma fundamental de uma superfície de revolução parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & I \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & S \\ & (u, v) & \longmapsto & (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \end{array}$$

   onde $f : I \to \mathbb{R}$ é positiva.

   (b) Seja S a superfície de revolução gerada pela rotação da curva plana $z = \cos x$, $x \in]0, 2\pi[$, em torno do eixo OZ. Determine os pontos da curva que dão origem, respectivamente, aos pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos de S.

6/7/05

Sugestão de resolução

---

1. (a) $\int_0^{2\pi} \sqrt{[(e^t \cos t)']^2 + [(e^t \sin t)']^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}[e^t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

   (b) $s = \int_0^t \sqrt{2}e^u\, du = \sqrt{2}(e^t - 1)$.

   $e^t - 1 = \frac{s}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow t = \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)$.

   Então, uma reparametrização de γ por comprimento de arco é dada pela curva $\tilde{\gamma}$ definida por

$$\tilde{\gamma}(s) = ((\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \cos \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1), (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \sin \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)).$$

   (c) Sendo α esse ângulo, temos $\cos\alpha = \frac{(\gamma(t)|T(t))}{\|\gamma(t)\|} = \frac{((e^t \cos t, e^t \sin t)|(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t)))}{e^t(e^t\sqrt{2})} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2}e^{2t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ (para $a \in \mathbb{R}^-$ a resolução é análoga). Então

$$T(t) = \frac{(-a\sin t, a\cos t, \varphi'(t))}{\sqrt{a^2 + [\varphi'(t)]^2}}$$

e

$$B(t) = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & \varphi'(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & \varphi''(t) \end{vmatrix}}{\sqrt{a^2[\varphi''(t)]^2 + a^2[\varphi'(t)]^2 + a^4}} = \frac{\varphi''(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t, -\varphi'(t)\cos t + \varphi''(t)\sin t, a)}{\sqrt{[\varphi''(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + a^2}},$$

donde

$$\begin{aligned} N(t) &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2 + [\varphi'(t)]^2}\sqrt{[\varphi''(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + a^2}}}_{A} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \varphi''(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t & -\varphi'(t)\cos t + \varphi''(t)\sin t & a \\ -a\sin t & a\cos t & \varphi'(t) \end{vmatrix} \\ &= A(\ldots, \ldots, a\varphi''(t)). \end{aligned}$$

Assim, $(N(t) \mid (0,0,1)) = 0$ se e só se $Aa\varphi''(t) = 0$, pelo que é suficiente que $\varphi''(t) = 0$ para que as normais principais à curva γ sejam paralelas ao plano $z = 0$. Por exemplo, φ pode ser a função identidade.

3. (a) Verdadeira.

   Com efeito, como o vector binormal $B(t) = B$ não depende de t, se considerarmos $u = B$ a definição de hélice generalizada é satisfeita:

$$(T(t) \mid B) = 0,\ \forall t \in I \Rightarrow \measuredangle(T(t), B) = \pi/2,\ \forall t \in I.$$

(b) Verdadeira.

Se $\tau_\gamma(s) = 0$, então o traço de γ está contido numa circunferência; em particular, $B_\gamma(s)$ é constante. Então o traço de α é uma recta (ou parte de uma recta), já que, com $B_\gamma(s) = B$, temos $\alpha(s) = \int_0^s B\,du = sB$. Como, neste caso, α é uma curva plana, a sua torsão é nula.

Se $\tau_\gamma(s) \neq 0$, então $\alpha'(s) = B_\gamma(s)$, pelo que α está parametrizada por comprimento de arco. Além disso, $\alpha''(s) = B'_\gamma(s) = -\tau_\gamma(s)N_\gamma(s)$ e $\alpha'''(s) = -\tau'_\gamma(s)N_\gamma(s) - \tau_\gamma(s)(-\kappa_\gamma(s)T_\gamma(s) + \tau_\gamma(s)B_\gamma(s))$. Portanto,

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(s) &= \frac{[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)]}{\|\alpha'(s)\wedge\alpha''(s)\|^2} = \frac{(\alpha'(s)\wedge\alpha''(s) \mid \alpha'''(s))}{[\tau_\gamma(s)]^2} = \frac{(\tau_\gamma(s)T_\gamma(s) \mid \alpha'''(s))}{[\tau_\gamma(s)]^2} = \\ &= \frac{\tau_\gamma(s)\tau_\gamma(s)\kappa_\gamma(s)}{[\tau_\gamma(s)]^2} = \kappa_\gamma(s).\end{aligned}$$

<u>Alternativa</u>: Usar a fórmula $\tau_\alpha(s) = -(B'_\alpha(s) \mid N_\alpha(s))$.

(c) Verdadeira.

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma hélice generalizada, parametrizada por comprimento de arco (o caso geral em que γ não está necessariamente parametrizada por comprimento de arco prova-se facilmente a partir do caso parametrizado por comprimento de arco). Consideremos o seu eixo u, que satisfaz a condição $(T(s)|u) = c$, para qualquer $s \in I$. Comecemos por referenciar esse vector na base formada pelo Triedro de Frenet-Serret:

$$u = \alpha_1(s)T(s) + \alpha_2(s)N(s) + \alpha_3(s)B(s)$$

onde

$$\alpha_1(s) = (u|T(s)), \alpha_2(s) = (u|N(s)) \text{ e } \alpha_3(s) = (u|B(s)).$$

Por hipótese $\alpha_1(s) = c$. Além disso, de $(u|T(s)) = c$ decorre, por derivação, $(u|N(s)) = 0$. Portanto, $u = cT(s) + \alpha_3(s)B(s)$. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= cT'(s) + \alpha_3'(s)B(s) + \alpha_3(s)B'(s) \\ &= c\kappa(s)N(s) + \alpha_3'(s)B(s) - \alpha_3(s)\tau(s)N(s) \\ &= (c\kappa(s) - \alpha_3(s)\tau(s))N(s) + \alpha_3'(s)B(s). \end{aligned}$$

Então $\alpha_3'(s) = 0$ para qualquer s, ou seja $\alpha_3(s) = \alpha$ (constante), e $c\kappa(s) - \alpha\tau(s) = 0$. Consequentemente, $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{c}{\alpha}$, para qualquer $s \in I$, pois $\alpha \neq 0$ (se fosse $\alpha = 0$ teríamos, por um lado, $c\kappa(s) = 0$, ou seja, $c = 0$, e por outro lado $u = cT(s)$ logo $1 = \|u\| = c$, o que seria contraditório).

(d) Falsa.

Consideremos a *projecção de Arquimedes* $f : P \mapsto Q$, da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ (menos os pólos norte e sul) no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, definida do seguinte modo: para cada ponto $P \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única recta horizontal que passa por P e pelo eixo OZ; esta recta intersecta o cilindro em dois pontos, um dos quais (que denotamos por Q) está mais perto de P.

Pelo Teorema de Arquimedes, provado nas aulas teóricas, f é equiareal, pois para o mapa global σ da esfera (menos os pólos norte e sul), dado pelas coordenadas esféricas, e a sua imagem $f \circ \sigma$ por f, as segundas formas fundamentais satisfazem $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$, e não é uma isometria pois estas duas formas fundamentais não coincidem.

4. (a) Seja S uma superfície do tipo $f^{-1}(a)$ (sendo a um valor regular de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Para cada mapa $\sigma : U' \to W \subseteq S$, $f \circ \sigma$ é constante ($f(\sigma(x)) = a$ para cada $x \in U'$) pelo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = J_f(p) \cdot J_\sigma(q)$$

para cada $p = \sigma(q) \in W$. Consequentemente, como $J_f(p) = \nabla f(p)$,

$$(\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)) = 0 \text{ e } (\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)) = 0.$$

Portanto, $\nabla f(p) \in (T_pS)^\perp$ pelo que o plano tangente a S em p, que denotamos por Π_p^S, é o plano que passa por p e é ortogonal a $\nabla f(p)$. Assim,

$$\Pi_p^S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x,y,z) - p \mid \nabla f(p)) = 0\}.$$

(b) (i) Consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z) = yx^2 + y^2$. Sendo uma função polinomial, é claramente uma função C^∞. Como $C = f^{-1}(\{1\})$, pelo critério

"Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície."

bastará verificarmos que 1 é um valor regular de f para concluirmos que C é uma superfície. Verifiquemos então isso:

$\nabla f(x,y,z) = (2yx, x^2 + 2y, 0)$, donde $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ se e só se $x = y = 0$. Portanto, o gradiente de f anula-se nos pontos $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$. Como nenhum destes pontos pertence a $f^{-1}(\{1\}) = C$, está confirmado que 1 é valor regular de f.

(ii) Pela alínea (a),

$$\begin{aligned} \Pi_p^C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x,y,z) - (0,1,2) \mid \nabla f(p)) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y-1, z-2) \mid (0,0,2)) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - 2 = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1\}. \end{aligned}$$

5. (a) Como

$$\begin{aligned} N(u,v) &= \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)\|} = \frac{(-g'(u)f(u)\cos v, -g'(u)f(u)\sin v, f'(u)f(u))}{\sqrt{[g'(u)]^2[f(u)]^2 + [f'(u)]^2[f(u)]^2}} = \\ &= \frac{(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u))}{\sqrt{[g'(u)]^2 + [f'(u)]^2}}, \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} e(u,v) &= -\Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}(u,v) \mid N(u,v)\Big) = \frac{g'(u)f''(u) - f'(u)g''(u)}{\sqrt{[g'(u)]^2 + [f'(u)]^2}}, \\ f(u,v) &= -\Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}(u,v) \mid N(u,v)\Big) = 0, \\ g(u,v) &= -\Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}(u,v) \mid N(u,v)\Big) = \frac{-f(u)g'(u)}{\sqrt{[g'(u)]^2 + [f'(u)]^2}}. \end{aligned}$$

Portanto a segunda forma fundamental do mapa Φ é a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{g'(u)f''(u)-f'(u)g''(u)}{\sqrt{[g'(u)]^2+[f'(u)]^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-f(u)g'(u)}{\sqrt{[g'(u)]^2+[f'(u)]^2}} \end{bmatrix}$$

(b) Pelo enunciado da alínea anterior, $\Phi(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \cos u)$ define um mapa da superfície de revolução gerada pela rotação da curva $z=\cos x$ em torno do eixo OZ. Particularizando os resultados da alínea (a) a este mapa obtemos:

$$\begin{aligned} e(u,v) &= \frac{g'(u)f''(u)-f'(u)g''(u)}{\sqrt{[g'(u)]^2+[f'(u)]^2}} = \frac{\cos u}{\sqrt{1+\sin^2 u}}, \\ f(u,v) &= 0, \\ g(u,v) &= \frac{-f(u)g'(u)}{\sqrt{[g'(u)]^2+[f'(u)]^2}} = \frac{u\sin u}{\sqrt{1+\sin^2 u}}. \end{aligned}$$

Para determinar a natureza dos pontos desta superfície faltará só calcular a primeira forma fundamental de Φ:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \mid \frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v)\right) = 1+\sin^2 u, \\ F(u,v) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \mid \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)\right) = 0, \\ G(u,v) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) \mid \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v)\right) = u^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} K(u,v) &= \frac{e(u,v)g(u,v)-[f(u,v)]^2}{E(u,v)G(u,v)-[F(u,v)]^2} = \frac{\cos u\sin u}{u(1+\sin^2 u)^2}, \\ H(u,v) &= \frac{E(u,v)g(u,v)-2f(u,v)F(u,v)+G(u,v)e(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-[F(u,v)]^2)} = \frac{\sin u(1+\sin^2 u)+u\cos u}{2u(1+\sin^2 u)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

- $p=\Phi(u,v)$ é elíptico se e só se $\cos u\sin u>0$, isto é, se e só se $u\in]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\pi,\frac{3\pi}{2}[$.
- $p=\Phi(u,v)$ é hiperbólico se e só se $\cos u\sin u<0$, isto é, se e só se $u\in]\frac{\pi}{2},\pi[\cup]\frac{3\pi}{2},2\pi[$.
- $p=\Phi(u,v)$ é parabólico se e só se $\cos u\sin u=0$ e $H(u,v)\neq 0$, isto é, se e só se $u=\frac{\pi}{2}$ ou $u=\pi$ ou $u=\frac{3\pi}{2}$.

Assim, os pontos da geratriz $z=\cos x$, $x\in]0,2\pi[$, que dão origem aos pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos de S são aqueles em que, respectivamente:

- $x\in]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\pi,\frac{3\pi}{2}[$ (a vermelho na figura abaixo) [Elípticos].
- $x\in]\frac{\pi}{2},\pi[\cup]\frac{3\pi}{2},2\pi[$ (a azul na figura abaixo) [Hiperbólicos].
- $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{2}$ (a verde na figura abaixo) [Parabólicos].

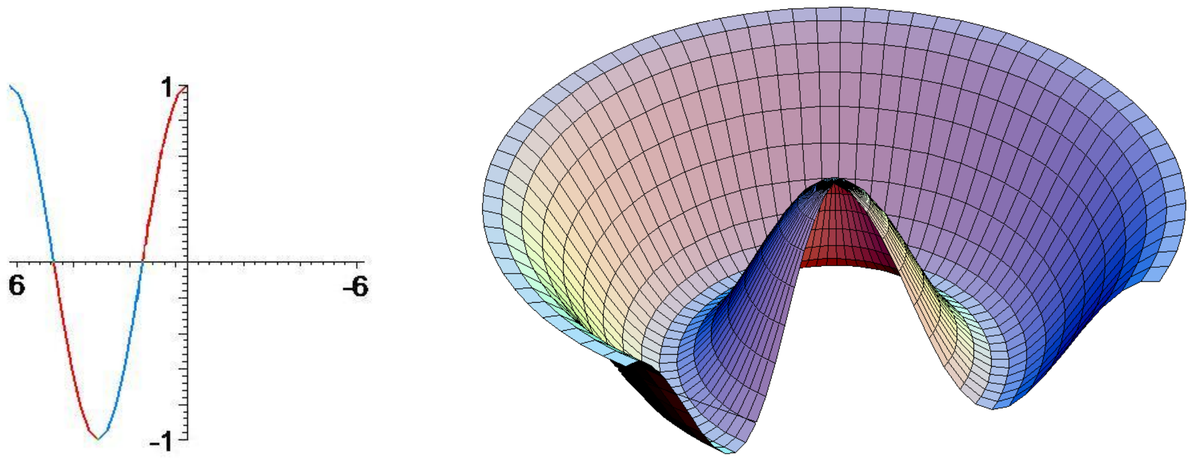

Gráfico da geratriz $z = \cos x$, $x \in]0, 2\pi[$, e parte da respectiva superfície de revolução S