Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m 22/7/05

---

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$ e $b = \sqrt{r^2 + a^2}$. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(s) = (r \cos \frac{s}{b}, r \sin \frac{s}{b}, a\frac{s}{b})$.
   (a) γ está parametrizada por comprimento de arco?
   (b) Determine a curvatura e a torsão de γ.
   (c) Mostre que o ângulo definido pelo eixo OZ e pela recta tangente a γ em cada ponto $\gamma(s)$ é constante.

2. Seja $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave, não parametrizada por comprimento de arco, tal que $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \neq (0, 0, 0)$ para qualquer $t \in J$.
   (a) Como se define, em cada $t \in J$, o triedro de Frenet-Serret de γ?
   (b) Deduza a expressão de N_γ' em função de T_γ e B_γ (suponha conhecidos os resultados para curvas parametrizadas por comprimento de arco de que necessitar).

3. Diga, justificando sucintamente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)
   (a) $\gamma(t) = (\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t)$ é uma parametrização da curva de intersecção do cilindro circular, de raio $\frac{1}{2}$ e eixo OZ, com a esfera de raio 1 e centro $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$.
   (b) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_a(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, at^3)$ é uma hélice generalizada para $a = 0, 1, 2$.
   (c) A superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + y^3\}$ contém pontos de qualquer um dos quatro tipos (planares, elípticos, parabólicos e hiperbólicos).

4. Seja $f : S_1 \to S_2$ um difeomorfismo entre superfícies.
   (a) Quando é que se diz que f é uma isometria?
   (b) Sejam $\Psi : U \longrightarrow V_1 \subseteq S_1$ e $\Phi : U \longrightarrow V_2 \subseteq S_2$ parametrizações de S_1 e S_2, respectivamente, e E, F, G e $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ os coeficientes das respectivas $1^{\underline{as}}$ formas fundamentais. Prove que a função $\Psi\Phi^{-1}$ é uma isometria se $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$ e $G = \overline{G}$.
   (c) Mostre que a aplicação *antípoda* na esfera de raio 1, $f : S^2 \to S^2$, definida por $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, é uma isometria.

5. Seja $\mathcal{R}$ uma superfície de revolução, com eixo de revolução OZ e geratriz parametrizada por $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$.
   (a) Prove que o ponto p de $\mathcal{R}$, obtido por rotação de ângulo v do ponto $\gamma(u)$ da geratriz, tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$.
   (b) Quando é que a geratriz está parametrizada por comprimento de arco?
   (c) Determine uma geratriz γ, parametrizada por comprimento de arco, cuja superfície de revolução tenha curvatura gaussiana constante, igual a 4.
