Ano lectivo 2004/05 **Geometria Diferencial**

Prova Complementar

Duração: 3h 22/7/05

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

---

1. Seja $\gamma : \mathbf{I} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco. Se colocarmos os vectores $T_\gamma(s)$, $s \in \mathbf{I}$, na origem $\mathbf{O}$, as suas extremidades descrevem uma curva (não necessariamente regular) $i_\gamma : \mathbf{I} \to S^2$ na esfera unitária, chamada ***indicatriz esférica*** de y.

   (a) O que é a imagem da indicatriz esférica de:

   (i) uma recta?

   (ii) uma curva plana?

   (b) Mostre que a imagem de i_γ está contida numa circunferência se e só se γ é uma hélice generalizada.

   (c) Prove o resultado das aulas que garante que se y : $\mathbf{I} \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice generalizada (cuja curvatura nunca se anula) então o quociente $\tau_\gamma(t)/\kappa_\gamma(t)$ é constante ao longo de t E $\mathbf{I}$.

2. Seja R uma superfície de revolução, com eixo de revolução OZ e geratriz parametrizada por $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$.

   (a) Prove que o ponto p de R, obtido por rotação de ângulo v do ponto $\gamma(u)$ da geratriz, tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$.

   (b) Quando é que a geratriz está parametrizada por comprimento de arco?

   (c) Determine as geratrizes γ, parametrizadas por comprimento de arco, cujas superfícies de revolução tenham curvatura gaussiana constante igual a 4.

3. Seja y : $\mathbf{I} \to \mathbb{R}^3$ uma curva plana cuja imagem está contida em $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z > 0\}$ e seja S a superficie de revolução obtida rodando γ em torno do eixo OY. Sendo

$$\begin{array}{rcl} \alpha : J & \longrightarrow & \gamma(I) \\ t & \longmapsto & (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t)). \end{array}$$

uma curva com velocidade constante, considere:

- para cada θ E $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_\theta : J & \longrightarrow & S \\ t & \longmapsto & (\alpha_2(t), \alpha_3(t)\cos 0, \alpha_3(t)\sin O); \end{array}$$

- para cada t E J,

$$\begin{array}{rcl} \beta_t : \mathbb{R} & \longrightarrow & S \\ \theta & \longmapsto & (\alpha_2(t), \alpha_3(t)\cos\theta, \alpha_3(t)\sin 8). \end{array}$$

As curvas α_θ chamam-se ***meridianos*** de S, e as circunferências β_t chamam-se *paralelos* de S.

(a) Mostre que os meridianos e os paralelos se intersectam sempre ortogonalmente (isto é, para quaisquer $t \in J$ e $\theta \in$ R, o ângulo de intersecção de α_θ e β_t é $\pi/2$).

(b) Sabendo que uma *geodésica* de uma superfície S é uma curva y : $\mathbf{I} \to S$ cuja aceleração $\gamma''(t)$ pertence a $(T_{\gamma(t)}S)^{\perp}$ para todo o $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$, prove que:

(i) Cada meridiano α_θ é uma geodésica da superfície de revolução S acima definida.

(ii) Um paralelo β_t é uma geodáica se e só se $\alpha_3'(t) = 0$.

4. Sendo S uma superfície, sejam y : $I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma curva regular suave, parametrizada por comprimento de arco, e $p = \gamma(s_0)$ E S.

(a) Como se define a curvatura normal $k_n(\gamma, s_0)$ de γ **em** s_0?

(b) Mostre que $k_n(\gamma, s_0) = \left(\gamma'(s_0) \middle| N_{*p}(\gamma'(s_0))\right)$.

(c) Usando a alínea anterior, prove que $k_n(\gamma, s_0) \in [K_2(p), K_1(p)]$.