

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

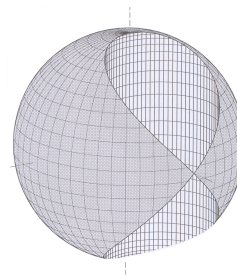
1. Considere a curva de Viviani $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$.

Mostre que:

- (a) γ está contida na intersecção do cilindro de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

- (b) γ tem curvatura $\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$ e torsão

$$\tau(t) = \frac{6 \cos \frac{t}{2}}{13+3\cos t}.$$



2. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

- (a) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$.
- (b) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t)$, é uma circunferência de raio 1.
- (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à hélice $h_{a,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r \cos t, r \sin t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ .
- (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.
- (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ é uma superfície.

3. (a) Seja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mapa da superfície S contendo o ponto p . Justifique que, sendo (u_0, v_0) as coordenadas de p em U , todo o vector tangente a S em p é gerado pelos vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$.

- (b) Seja $\sigma : (0, 2) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p = (1, 0, 1)$. O vector $(-1, -1, 1)$ é tangente a S no ponto p ?

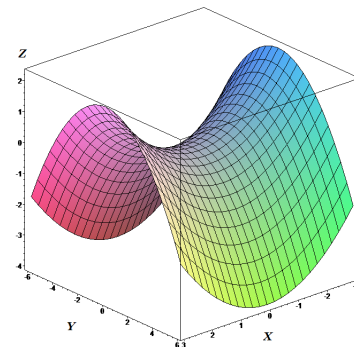
4. Dada uma aplicação suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (onde U é um conjunto aberto), considere a superfície $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.

- (a) Classifique os pontos de G_f relativamente a $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

- (b) O parabolóide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = x^2 - y^2\}$ contém pontos que não sejam hiperbólicos?

- (c) Mostre que a área de G_f é igual a

$$\int \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$



Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

Soluções

1. Considere a curva de Viviani $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$.
Mostre que:

- (a) γ está contida na intersecção do cilindro de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- (b) γ tem curvatura $\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}}$ e torsão $\tau(t) = \frac{6 \cos \frac{t}{2}}{13+3\cos t}$.

Solução

2. Diga, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. (Atenção: resposta sem a devida justificação não será cotada.)

- (a) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$.
- (b) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t)$, é uma circunferência de raio 1.
- (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à hélice $h_{a,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r \cos t, r \sin t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ .
- (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.
- (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ é uma superfície.

Solução

3. (a) Seja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mapa da superfície S contendo o ponto p . Justifique que, sendo (u_0, v_0) as coordenadas de p em U , todo o vector tangente a S em p é gerado pelos vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$.
- (b) Seja $\sigma : (0, 2) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p = (1, 0, 1)$. O vector $(-1, -1, 1)$ é tangente a S no ponto p ?

Solução

4. Dada uma aplicação suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (onde U é um conjunto aberto), considere a superfície $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.

- (a) Classifique os pontos de G_f relativamente a $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
- (b) O parabolóide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = x^2 - y^2\}$ contém pontos que não sejam hiperbólicos?
- (c) Mostre que a área de G_f é igual a $\int \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$.

Solução

Sugestão de resolução

1. (a) Basta verificar que $(x-1)^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ e

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2 \cos t + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2 \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) + 4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 2 + 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

- (b) $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2})$, $\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2})$ e $\gamma'''(t) = (\sin t, -\cos t, -\frac{1}{4} \cos \frac{t}{2})$,
donde

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}, \\ \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \left(-\frac{1}{2} \cos t \sin \frac{t}{2} + \sin t \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} \sin t \sin \frac{t}{2} - \cos t \cos \frac{t}{2}, 1\right), \\ \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

e

$$[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] = \sin^2 t \cos \frac{t}{2} + \cos^2 t \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{t}{2} = \frac{3}{4} \cos \frac{t}{2}.$$

De $\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - (1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)) = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$
conclui-se que $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos t}{2}$ e, conseqüentemente, $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}$.

Então

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1-\cos t}{8} + \frac{1+\cos t}{2}}}{\left(1 + \frac{1+\cos t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{13 + 3 \cos t}}{(3 + \cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\tau(t) = \frac{\frac{3}{4} \cos \frac{t}{2}}{1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4} \cos \frac{t}{2}}{1 + \frac{1-\cos t}{8} + \frac{1+\cos t}{2}} = \frac{\frac{3}{4} \cos \frac{t}{2}}{\frac{13+3 \cos t}{8}} = \frac{6 \cos \frac{t}{2}}{13 + 3 \cos t}.$$

2. (a) Verdadeira:

Como $\gamma'(t) = (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)$, então

$$\|\gamma'(t)\|^2 = e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 = e^{-2t} + e^{-2t} = 2e^{-2t}.$$

Portanto,

$$\int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{2}e^{-u} du = \sqrt{2}[-e^{-u}]_0^t = \sqrt{2}(-e^{-t} + 1),$$

pelo que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \sqrt{2}$.

(b) Verdadeira:

A curva está parametrizada por comprimento de arco: para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma'(t)\| = \|(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t)\| = 1$. Assim,

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \|(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s)\| = 1.$$

Por outro lado, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = (-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s)$. Então $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ é igual a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{4}{5} \sin s & -\cos s & \frac{3}{5} \sin s \\ -\frac{4}{5} \cos s & \sin s & \frac{3}{5} \cos s \end{vmatrix} &= \left(-\frac{3}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s), 0, -\frac{4}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s) \right) \\ &= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right). \end{aligned}$$

Portanto, $B'(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, pelo que a curva é plana. Como a curvatura é constante, igual a 1, terá que ser uma circunferência de raio 1.

(c) Verdadeira:

A recta normal tem a direcção do vector normal logo tem a mesma direcção que o vector $T'(t)$. Como este vector é paralelo a $\gamma''(t)$ basta então verificar que $\gamma''(t)$ é ortogonal a $(0, 0, 1)$, o que é óbvio pois $\gamma''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$.

(d) Falsa:

O gradiente $\nabla_f(x, y, z)$ de f no ponto (x, y, z) é o vector $(2x, -2y, 0)$, que se anula nos pontos $(0, 0, z)$ ($z \in \mathbb{R}$). No entanto, todos estes pontos pertencem a $f^{-1}(\{0\})$.

(e) Falsa:

Atendendo ao resultado da alínea anterior não podemos aplicar o critério do valor regular. Contudo podemos observar directamente que não se trata de uma superfície pois, sendo a união de dois planos ($x = y$ e $x = -y$) que se intersectam, tem pontos de auto-intersecção pelo que não satisfaz a definição de superfície.

3. (a) Seja v um vector tangente a S em p e seja $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ um mapa de S contendo o ponto p . Por definição de vector tangente existe uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow W$ e $t_0 \in (a, b)$ tais que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Consideremos a composição $(a, b) \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W$. Denotando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\bar{\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} J_\gamma(t_0) = J_\sigma(u_0, v_0) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \\ \gamma'_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(u_0, v_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(u_0, v_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(u_0, v_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_1(t_0) \\ \bar{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow v = \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u_0, v_0) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

- (b) Como $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (\cos v, \sin v, 1)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0)$, então, em $p = \sigma(1, 0)$, temos $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(1, 0) = (1, 0, 1)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(1, 0) = (0, 1, 0)$. Portanto $(-1, -1, 1)$ será tangente a S em p se e só se for combinação linear dos vectores $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$, ou seja, for do tipo (α, β, α) para algum par de reais α e β , o que não é o caso.

4. (a) A superfície G_f admite a parametrização global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Calculemos a primeira forma fundamental de σ :

$$E(x, y) = \left((1, 0, f_x) \mid (1, 0, f_x) \right) = 1 + f_x^2,$$

$$F(x, y) = \left((1, 0, f_x) \mid (0, 1, f_y) \right) = f_x f_y,$$

$$G(x, y) = \left((0, 1, f_y) \mid (0, 1, f_y) \right) = 1 + f_y^2.$$

Como

$$N(x, y) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\|} = \frac{(1, 0, f_x) \wedge (0, 1, f_y)}{\|(1, 0, f_x) \wedge (0, 1, f_y)\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

então

$$e(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, y) \mid N(x, y) \right) = -\frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$f(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) \mid N(x, y) \right) = -\frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$g(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x, y) \mid N(x, y) \right) = -\frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Finalmente,

$$K(x, y) = \frac{e(x, y)g(x, y) - [f(x, y)]^2}{E(x, y)G(x, y) - [F(x, y)]^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{E(x, y)g(x, y) - 2f(x, y)F(x, y) + G(x, y)e(x, y)}{2(E(x, y)G(x, y) - [F(x, y)]^2)} \\ &= \frac{-(1 + f_x^2)f_{yy} + 2f_{xy}f_x f_y - (1 + f_y^2)f_{xx}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

- $p = \sigma(x, y)$ é elíptico se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$.
- $p = \sigma(x, y)$ é hiperbólico se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$.
- $p = \sigma(x, y)$ é parabólico se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ e $H(x, y) \neq 0$.
- $p = \sigma(x, y)$ é planar se e só se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ e $H(x, y) = 0$.

- (b) Não, pois nesse caso $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4 < 0$.

- (c) Numa superfície orientável, a área de uma região \mathcal{R} abrangida por uma parametrização $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, em função da primeira forma fundamental de σ , é dada pela fórmula

$$\int \int_{\sigma^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2} \, dx \, dy.$$

Portanto, no caso de G_f , como $\sigma^{-1}(G_f) = U$, é dada por

$$\int \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$