Duração: 30m **Teste 1A** 6/03/06

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(x|y) = 0$ se e só se x e y são linearmente independentes. ☐ ☐

   (b) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1, at^2, t^3)$, é regular para qualquer $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ☐ ☐

   (c) Numa curva parametrizada por comprimento de arco, $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. ☐ ☐

   (d) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$. ☐ ☐

2. (a) A curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(s) = (\frac{5}{13}\cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s)$ está parametrizada por comprimento de arco?

   (b) Determine a sua curvatura e a sua torsão. A curva é plana?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 1A** 6/03/06

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(x|y) = 0$ se e só se x e y são linearmente independentes. [ ] [×]

   `[Sendo` $x, y \neq 0$`, então` $(x \mid y) = 0 \Leftrightarrow \cos\measuredangle(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$`. Portanto, todos os pares de vectores` x, y `não ortogonais e não paralelos são exemplos de vectores linearmente independentes para os quais` $(x \mid y) \neq 0$`. Por exemplo,` $x = (0,1,0)$ `e` $(0,1,1)$ `são linearmente independentes mas` $(x \mid y) = 1 \neq 0$`.]`

   (b) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1, at^2, t^3)$, é regular para qualquer $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. [ ] [×]

   `[`$\gamma_a'(t) = (0, 2at, 3t^2)$ `pelo que` $\gamma_a'(0) = (0,0,0)$`.]`

   (c) Numa curva parametrizada por comprimento de arco, $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. [×] [ ]

   `[É a terceira fórmula de Frenet-Serret.]`

   (d) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$. [×] [ ]

   `[Como` $\gamma'(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$`, então` $\|\gamma'(t)\|^2 = e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 = e^{-2t} + e^{-2t} = 2e^{-2t}$`. Portanto,` $\int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du = \int_0^t \sqrt{2}e^{-u}\,du = \sqrt{2}[-e^{-u}]_0^t = \sqrt{2}(-e^{-t}+1)$`, pelo que` $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du = \sqrt{2}$`.]`

2. (a) A curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(s) = (\frac{5}{13}\cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s)$ está parametrizada por comprimento de arco?

   Sim: $\gamma'(s) = (-\frac{5}{13}\sin s, -\cos s, \frac{12}{13}\sin s)$ donde

   $$\|\gamma'(s)\|^2 = \left((\frac{5}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2\right)\sin^2 s + \cos^2 s = \sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

   para todo o $s \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a sua curvatura e a sua torsão. A curva é plana?

Como $\gamma''(s) = (-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s)$, então $k(s) = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s} = 1$. Por outro lado, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = (-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s)$. Então $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ é igual a

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{5}{13}\sin s & -\cos s & \frac{12}{13}\sin s \\ -\frac{5}{13}\cos s & \sin s & \frac{12}{13}\cos s \end{vmatrix} = \Big(-\frac{12}{13}(\cos^2 s + \sin^2 s), 0, -\frac{5}{13}(\cos^2 s + \sin^2 s)\Big)$$

$$= \Big(-\frac{12}{13}, 0, -\frac{5}{13}\Big).$$

Portanto, $B'(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, pelo que a curva é plana. (Uma vez que a curvatura também é constante, trata-se de uma circunferência de raio 1.)

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 1B** 6/03/06

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $x \wedge y = 0$ se e só se x e y são ortogonais. ☐ ☐

   (b) Uma reparametrização de uma curva regular pode não ser regular. ☐ ☐

   (c) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$, é uma circunferência de raio 1. ☐ ☐

   (d) A curvatura de uma circunferência é inversamente proporcional ao seu raio. ☐ ☐

2. (a) A curva $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(s) = (\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}})$, está parametrizada por comprimento de arco?

   (b) Determine o seu triedro de Frenet-Serret.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 1B** 6/03/06

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $x \wedge y = 0$ se e só se x e y são ortogonais. [ ] [×]

   [Sendo $x, y \neq 0$, então $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \sin \measuredangle(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \| y$.]

   (b) Uma reparametrização de uma curva regular pode não ser regular. [ ] [×]

   [Pela Proposição 2.9, toda a reparametrização de uma curva regular é regular: $\tilde{\gamma}'(t) = (\gamma \circ \lambda)'(t) = \lambda'(t) \cdot \gamma'(\lambda(t)) \neq 0$.]

   (c) O traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$, é uma circunferência de raio 1. [×] [ ]

   [A curva está parametrizada por comprimento de arco: para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma'(t)\| = \|(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t)\| = 1$. Assim, $k(s) = \|\gamma''(s)\| = \|(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s)\| = 1$. Por outro lado, $N(s) = \frac{T'(s)}{k(s)} = (-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s)$. Então $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ é igual a

   $$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{4}{5}\sin s & -\cos s & \frac{3}{5}\sin s \\ -\frac{4}{5}\cos s & \sin s & \frac{3}{5}\cos s \end{vmatrix} = \Big(-\frac{3}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s), 0, -\frac{4}{5}(\cos^2 s + \sin^2 s)\Big)$$
   $$= \Big(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\Big).$$

   Portanto, $B'(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, pelo que a curva é plana. Como a curvatura é constante, igual a 1, terá que ser uma circunferência de raio 1.]

   (d) A curvatura de uma circunferência é inversamente proporcional ao seu raio. [×] [ ]

   [$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ é uma parametrização da circunferência de raio r, pelo que a sua curvatura é igual a $k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\|(0,0,r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)\|}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$.]

2. (a) A curva $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, está parametrizada por comprimento de arco?

Sim: para cada $s \in (-1,1)$, $\gamma'(s) = \left(\frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donde $\|\gamma'(s)\|^2 = \frac{1}{4}(1+s) + \frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{2} = 1$.

(b) Determine o seu triedro de Frenet-Serret.

$T(s) = \gamma'(s) = \left(\frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\left(\frac{1}{4}(1+s)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{1}{2}}, 0\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{(1+s)^{-1}+(1-s)^{-1}}} = \frac{\left(\frac{1}{4}(1+s)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{1}{2}}, 0\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{2(1-s^2)^{-1}}} = \left(\sqrt{\frac{1-s}{2}}, \sqrt{\frac{1+s}{2}}, 0\right)$.

$B(s) = T(s) \wedge N(s) = \left(-\frac{\sqrt{1+s}}{2}, \frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.