Duração: 30m **Teste 2A** 3/04/06

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Rodando 90°, no sentido positivo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, -v_1)$.

   (b) Se todo o plano normal de $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ passa por um ponto fixo então γ é uma curva esférica.

   (c) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_a(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, at^3)$ é uma hélice generalizada para $a = 0, 1, 2$.

   (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2xy - z^2 - 2yz = 1\}$ é uma superfície.

2. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t^2, -t + t^2, -t + 2)$.

   (a) Prove que γ é plana.

   (b) Determine a equação do plano osculador a γ em t e averigue se existe algum ponto onde esse plano seja paralelo ao plano XOY.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 2A** 3/04/06

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Rodando 90°, no sentido positivo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, -v_1)$.

V	F
	×

   [O vector que se obtem é o vector $(-v_2, v_1)$ e não $(-v_2, -v_1)$ (este é o resultado de uma rotação de 180^0).]

   (b) Se todo o plano normal de $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ passa por um ponto fixo então γ é uma curva esférica.

V	F
×	

   [Exercício I.3.16 feito nas aulas.]

   (c) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma_a(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, at^3)$ é uma hélice generalizada para $a = 0, 1, 2$.

V	F
	×

   [A afirmação é falsa porque γ_a não é uma hélice generalizada para $a = 2$: neste caso, $\tau(t)/\kappa(t) = 2((\frac{16}{9} + 16t^2 + 144t^4)/(\frac{16}{9} + 64t^2 + 144t^4))^{\frac{3}{2}}$ não é constante.
   Mais geralmente, como $[\gamma_a'(t), \gamma_a''(t), \gamma_a'''(t)] = 8a$, $\|\gamma_a'(t)\| = (\frac{4}{9} + 4t^2 + 9a^2t^4)^{\frac{1}{2}}$ e $\|\gamma_a'(t) \wedge \gamma_a''(t)\| = (\frac{16}{9} + 16a^2t^2 + 36a^2t^4)^{\frac{1}{2}}$, então $\tau(t)/\kappa(t)$ é igual a $8a((\frac{4}{9} + 4t^2 + 9a^2t^4)/(\frac{16}{9} + 16a^2t^2 + 36a^2t^4))^{\frac{3}{2}}$, que é constante exactamente para $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$.]

   (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2xy - z^2 - 2yz = 1\}$ é uma superfície.

V	F
×	

   [A afirmação é verdadeira pois $S = f^{-1}(\{1\})$, para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 2x^2 + 2xy - z^2 - 2yz$, e 1 é valor regular de f: o gradiente $\nabla_f(x, y, z) = (4x + 2y, 2x - 2z, -2z - 2y)$ só se anula em $(0, 0, 0)$ e este ponto não pertence a S.]

2. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t^2, -t + t^2, -t + 2)$.

(a) Prove que γ é plana.

γ é plana se e só se a sua torsão for constantemente nula. Como

$$\tau(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

e $\gamma'''(t) = 0$ então $\tau(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a equação do plano osculador a γ em t e averigue se existe algum ponto onde esse plano seja paralelo ao plano XOY.

O plano osculador de γ em cada ponto $\gamma(t)$ é o plano que passa por $\gamma(t)$ paralelo à tangente $T(t)$ e à normal $N(t)$, ou seja, é o plano que passa por $\gamma(t)$ e é ortogonal à binormal $B(t)$. Como

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|},$$

então a direcção de $B(t)$ é dada pelo vector $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (2, -2, 2)$, ou, o que é o mesmo, pelo vector $(1, -1, 1)$. Portanto o plano osculador em $\gamma(t)$ é definido pela equação

$$((x, y, z) - (t^2, -t + t^2, -t + 2) \mid (1, -1, 1)) = 0,$$

ou seja, $x - y + z = 2$. Este plano (que é sempre o mesmo em qualquer t) não é paralelo ao plano XOY. Em conclusão, em nenhum ponto da curva o plano osculador é paralelo ao plano horizontal XOY.

Alternativa (evitando o cálculo do plano osculador):

O plano osculador será paralelo ao plano horizontal XOY se e só se for ortogonal ao vector vertical $(0, 0, 1)$. Como o plano osculador é ortogonal a $(1, -1, 1)$, isso será verdade se e só se os vectores $(1, -1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ forem paralelos, o que não é verdade.

Duração: 30m **Teste 2B** 3/04/06

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para qualquer curva plana $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco, $\kappa_s(s) = \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s)$. ☐ ☐

   (b) Rodando 90°, no sentido negativo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, v_1)$. ☐ ☐

   (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à curva $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ. ☐ ☐

   (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. ☐ ☐

2. (a) Qual é a propriedade geométrica que define as hélices generalizadas $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$? Como se caracterizam estas curvas em termos da curvatura e da torsão?

   (b) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave, considere a curva

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen} f(r)dr, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \displaystyle\int_0^t \cos f(r)dr, \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \right). \end{array}$$

   Mostre que γ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 2B** 3/04/06

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

   (a) Para qualquer curva plana $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco, $\kappa_s(s) = \gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s)$.

V	F
×	

   `[Corolário 4.3, p. 43.]`

   (b) Rodando 90°, no sentido negativo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, v_1)$.

V	F
	×

   [O vector que se obtem é o vector $(v_2, -v_1)$ e não $(-v_2, v_1)$ (este é o resultado de uma rotação de 90^0, mas no sentido positivo).]

   (c) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à curva $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ.

V	F
×	

   [Exercício 3.23 (b): A recta normal tem a direcção do vector normal logo tem a mesma direcção que o vector $T'(t)$. Como este vector é paralelo a $\gamma''(t)$ basta então verificar que $\gamma''(t)$ é ortogonal a $(0,0,1)$, o que é óbvio pois $\gamma''(t) = (-r\cos t, -r \operatorname{sen} t, 0)$.]

   (d) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

V	F
	×

   [É falso, uma vez que o gradiente $\nabla_f(x,y,z)$ de f no ponto (x,y,z) é o vector $(2x, 2y, 2z)$, que só se anula em $(0,0,0)$, mas este ponto pertence a $f^{-1}(\{0\})$.]

2. (a) Qual é a propriedade geométrica que define as hélices generalizadas $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$? Como se caracterizam estas curvas em termos da curvatura e da torsão?

   Uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ diz-se uma hélice generalizada quando existe um vector unitário u (o chamado eixo da hélice) tal que o produto escalar $(u \mid T(t))$ é independente do parâmetro t. Equivalentemente, uma curva γ é uma hélice generalizada se e só se o quociente $\tau(t)/\kappa(t)$ é independente de t.

(b) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave, considere a curva

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^t \operatorname{sen} f(r) dr, \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^t \cos f(r) dr, \frac{\sqrt{2}}{2} t \right). \end{array}$$

Mostre que γ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo?

Como $\gamma'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} f(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos f(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, então $\|\gamma'(t)\| = 1$. Portanto,

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] \cdot \|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^3} = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^3}.$$

Como

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \left(\frac{1}{2} f'(t) \operatorname{sen} f(t), \frac{1}{2} f'(t) \cos f(t), -\frac{1}{2} f'(t)\right),$$

então $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{2} f'(t)$. Finalmente,

$$\gamma'''(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} f''(t) \cos f(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} (f'(t))^2 \operatorname{sen} f(t), -\frac{\sqrt{2}}{2} f''(t) \operatorname{sen} f(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} (f'(t))^2 \cos f(t), 0\right),$$

pelo que $[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] = -\frac{\sqrt{2}}{4}(f'(t))^3$. Portanto, $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = -1$, o que mostra que a curva é, de facto, uma hélice generalizada de eixo $u = cT(t) + \sqrt{1 - c^2} B(t)$ onde $c = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} T(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} B(t) = (0, 0, -1)$.

Alternativa (evitando o cálculo do quociente $\tau(t)/\kappa(t)$):

Como

$$\gamma'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} f(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos f(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

então $\|\gamma'(t)\| = 1$ e a curva está parametrizada por comprimento de arco. Portanto $T(t) = \gamma'(t)$. Basta então considerar $u = (0, 0, 1)$: o produto escalar $(u \mid T(t))$ é constante (igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$) pelo que γ é uma hélice generalizada de eixo vertical $(0, 0, 1)$.
