Duração: 30m **Teste 3A** 27/04/06

Nome:

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:
   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(z-2) + xy = 2\}$ é uma superfície.
   (b) Para qualquer função suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e para qualquer $a \in f(U)$, $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ é uma superfície.

2. (a) Como se define um vector tangente a uma superfície S num ponto $p \in S$?
   (b) Seja
$$\begin{array}{rccl} \sigma : & (0,2) \times (0, 2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (u \cos v, u \sin v, u) \end{array}$$
   um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p = (0, 1, 1)$. O vector $(-1, -1, -1)$ é tangente a S no ponto p? (Justifique a resposta.)

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 3A** 27/04/06

Soluções

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(z-2) + xy = 2\}$ é uma superfície.

   Verdadeiro, pois $S = f^{-1}(2)$ onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = z(z-2) + xy$, é uma função suave, e 2 é um valor regular de f. De facto, $\nabla_f(x, y, z) = (y, x, 2z-2)$ só se anula no ponto $(0, 0, 1)$ e este ponto não é um ponto de S.

   (b) Para qualquer função suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e para qualquer $a \in f(U)$, $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ é uma superfície.

   Falso: o cone duplo $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ coincide com $f^{-1}(0)$ para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, mas pelo que vimos nas aulas, C não é uma superfície.

2. (a) Como se define um vector tangente a uma superfície S num ponto $p \in S$?

   Um vector $v \in \mathbb{R}^3$ diz-se *tangente* a S em p caso exista uma curva γ em S, passando por p, à qual v seja tangente nesse ponto; ou seja, caso exista uma curva $\gamma : I \to S$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$ para algum t_0 em I.

   (b) Seja
   $$\begin{array}{rccl} \sigma : & (0,2) \times (0, 2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (u \cos v, u \sin v, u) \end{array}$$
   um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p = (0, 1, 1)$. O vector $(-1, -1, -1)$ é tangente a S no ponto p? (Justifique a resposta.)

   Como
   $$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (\cos v, \sin v, 1)$$
   e
   $$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$
   então, em $p = \sigma(1, \frac{\pi}{2})$, temos $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 1)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(1, \frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 0)$. Portanto $(-1, -1, -1)$ será tangente a S em p se e só se for combinação linear dos vectores $(0, 1, 1)$ e $(-1, 0, 0)$, ou seja, for do tipo $(-\beta, \alpha, \alpha)$ para algum par de reais α e β, o que é o caso ($\alpha = -1$ e $\beta = 1$).

Duração: 30m **Teste 3B** 27/04/06

Nome:

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) Para qualquer função suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x, z)\}$ é uma superfície.

   (b) Cada ponto p da superfície obtida por rotação, de ângulo $v \in (0, 2\pi)$, em torno do eixo OZ, da curva $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I$, tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, g(u), f(u)\sin v)$.

2. Para cada $c \in \mathbb{R}_0^+$ considere $S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = c\}$.

   (a) Mostre que S_c é uma superfície para $c \neq 0$.

   (b) O vector $(-1, 2, 1)$ é tangente a S_1 no ponto $(1, 1, 0)$? (Justifique a resposta.)

Duração: 30m **Teste 3B** 27/04/06

Soluções

---

1. Diga, justificando sucintamente, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) Para qualquer função suave $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x, z)\}$ é uma superfície.

   Verdadeiro: a função $\sigma : U \to G_f$, definida por $\sigma(x, z) = (x, f(x, z), z)$, é um mapa global de G_f, uma vez que se trata de um homeomorfismo suave definido num aberto de $\mathbb{R}^2$, cuja matriz jacobiana

$$J_\sigma(x, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   tem característica 2.

   (b) Cada ponto p da superfície obtida por rotação, de ângulo $v \in (0, 2\pi)$, em torno do eixo OZ, da curva $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I$, tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, g(u), f(u) \sin v)$.

   Falso, pois o ponto p tem vector de posição $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, uma vez que a rotação em torno de OZ mantém a altitude $g(u)$ do ponto $\gamma(u)$ em rotação.

2. Para cada $c \in \mathbb{R}_0^+$ considere $S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = c\}$.

   (a) Mostre que S_c é uma superfície para $c \neq 0$.

   $S_c = f^{-1}(c)$, para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$. Como $\nabla_f(x, y, z) = (2xy^2 + 2xz^2, 2yx^2 + 2yz^2, 2zx^2 + 2zy^2)$, este vector anula-se nos pontos (x, y, z) tais que $x = y = 0$ ou $x = z = 0$ ou $y = z = 0$ (isto é, em $OX \cup OY \cup OZ$). Mas, para $c \neq 0$, nenhum destes pontos pertence a S_c, o que mostra que c é um valor regular de f e S_c é então uma superfície.

   (b) O vector $(-1, 2, 1)$ é tangente a S_1 no ponto $(1, 1, 0)$? (Justifique a resposta.)

   O vector $(-1, 2, 1)$ será tangente a S_1 em $(1, 1, 0)$ se e só se for ortogonal a $\nabla_f(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$, ou seja, se e só se $((-1, 2, 1) \mid (2, 2, 0)) = 0$, o que não é verdade.
