Curvas & Superfícies

5 de Julho de 2011

Nome: ____

____

Observação: A não ser que haja outra indicação, suponha que as curvas são regulares e que as curvas, aplicações e superfícies são C^∞.

Repare que as respostas às questões **I - 1), II - 1)** devem ser apresentadas sem qualquer justificação.

I

1 - Considere a superfície $\phi : R^2 \to R^3$ dada por $\phi(x,y) = (x-y, x+y, x^2-y^2)$. Indique, **sem justificação**,

a) $n_G(0,0)$.

____

____

b) os pontos $(x,y) \in R^2$ tais que a recta normal em (x,y) seja paralela ao eixo dos zs.

____

____

c) $I_{(x,y)}(1,1,2x)$ e $I_{(x,y)}(-1,1,-2y)$, para $(x,y) \in R^2$.

____

____

d) a curvatura média e a curvatura de Gauss em $(0,0)$.

____

____

e) uma aplicação $f : R^3 \to R$ tal que $\phi(R^2) \subset f^{-1}(1)$, sendo 1 valor regular de f.

____

____

2 - Considere uma curva f parametrizada por comprimento de arco e plana.

Indique como, alternativamente, se pode dar a definição de curvatura para f e relacione-a com a curvatura habitual.

II

1 - Considere a curva $f : R \to R^3$ tal que $f(t) = (t^2, 1 - t^2, 2t)$. Indique, **sem justificação**,

a) o conjunto dos pontos $t \in R$ tais que o ângulo formado pelos vectores $f'(t), f''(t)$ é $\frac{\pi}{2}$.

b) uma equação em x, y, z para o plano normal em $t = 1$.

c) o conjunto dos pontos $t \in R$ tais que a recta normal principal em t é paralela ao plano yOz.

d) $B_f(t), t \in R$.

e) uma razão simples, obtida a partir de uma das respostas anteriores, que lhe permita dizer se f é uma hélice cilíndrica ou não.

2 - a) Seja $f : I \to R^3$ uma curva não necessariamente parametrizada por comprimento de arco e cuja curvatura se não anula. Para $t \in I$, exprima $f''(t)$ usando o triedro de Frenet-Serret em t.

b) Suponha agora que tem uma curva parametrizada por comprimento de arco e cuja curvatura se não anula. Considere $V : I \to R^3$ dada por $V(t) = \tau(t)T(t) + k(t)B(t)$.

Expresse N' usando V, mas não as suas derivadas, e o triedro de Frenet-Serret.

3 - Sejam $f : I \to R^3$ uma curva regular e Π um plano. Suponha que $t_0 \in I$ é tal que $f(t_0) \in \Pi$ e que a imagem de f está inteiramente contido num dos semi-espaços fechados determinado pelo plano.

Que conclusão pode tirar acerca da tangente à curva em t_0?