Departamento de Matemática

Exame de época normal de Equações Diferenciais

Licenciatura em Matemática

12-06-2002

Nome____

Nº de aluno____________________________________

1ª parte

Para cada uma das questões seguintes assinale a **única** resposta certa.

1-A equação $\frac{dy}{dt}+(\cos t)y = y^k sent$ é linear se e só se

- ☐ k=0.
- ☐ k=1.
- ☒ k=0 ou k=1.

2- Se $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então

- ☐ $\forall \lambda \in \sigma(A) \quad m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.
- ☒ A não é diagonalizável.
- ☐ A pode ser a matriz nula.

3- Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções particulares da equação diferencial $y''+a_1(t)y'+a_2(t)y = b(t), b(t) \neq 0$, então

- ☒ $y_1(t)+y_2(t)$ é solução de $y''+a_1(t)y'+a_2(t)y = 2b(t)$.
- ☐ $y_1(t)-y_2(t)$ é solução de $y''+a_1(t)y'+a_2(t)y = b(t)$.
- ☐ $y_1(t)+y_2(t)$ é solução de $y''+a_1(t)y'+a_2(t)y = 0$.

4- Se o sistema $y' = Ay$, com $A \in IR^{3\times3}$, $\det(A) \neq 0$, é estável, mas não assimptoticamente estável, então

- ☒ a matriz A é diagonalizável.
- ☐ $traço(A) = 0$.
- ☐ a matriz A pode não ser diagonalizável.

5- Considere o sistema $y' = (A+b)y$.

- ☒ Se AB=BA, então $e^{AT}e^{Bt}$ é matriz fundamental do sistema.
- ☐ $e^{(A+B)t}$ é a única matriz fundamental do sistema.
- ☐ Se $traço(A) = -traço(B)$, então $\det e^{A+B} \neq 1$.

6- Um sistema $y'(t) = Ay(t) + b$

- ☐ tem sempre um ponto de equilíbrio quando $b \neq 0$.
- ☒ tem, pelo menos, um ponto de equilíbrio se $b = 0$.
- ☐ pode não ter pontos de equilíbrio se $b = 0$.

Departamento de Matemática
Exame de época normal de Equações Diferenciais
Licenciatura em Matemática

2ª parte

Duração: 3h

12 de Junho de 2002

1-a) Mostre que a equação diferencial $(4t+3y^2)+2tyy'=0$ admite um factor integrante da forma $t^n, n\in IN$.

b) Determine o integral geral da equação dada.

2- a) Mostre que a mudança de variável $(y\to u)$, definida por $y=ux$, transforma a equação diferencial $y^n f(x)+g\left(\frac{y}{x}\right)(y-xy')=0$ numa equação de variáveis separáveis.

b) Determine uma família de soluções da equação diferencial $y^2x+\frac{y}{x}(y-xy')=0$.

3- Considere a equação diferencial

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)y'+a_n(t)y=0, \qquad (1)$$

onde as funções $a_i, i=1,\ldots,n$, são contínuas num certo intervalo $I\subset IR$. Prove que o conjunto das soluções em I de (1) forma um espaço vectorial real de dimensão n.

4- Sabendo que $e^{At}=\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ te^t & 0 & e^t\end{bmatrix}$

a) Indique quais os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

b) Determine uma matriz A nas condições do enunciado.

c) Sem resolver o sistema $y'=Ay$, diga qual é a sua solução geral.

d) Calcule a solução particular do sistema $y'=Ay+b(t)$, $b(t)=[1 \quad t \quad 0]^T$ que satisfaz a condição inicial $y(0)=0$.

5- Dado o sistema $\begin{cases} x'=x-1\\ y'=y+1\end{cases}$ faça um esboço do retrato de fase e classifique os pontos de equilíbrio quanto à estabilidade.

6- Considere o sistema $\begin{cases} x'=1-xy\\ y'=x-y^3\end{cases}$.

a) Mostre que este sistema tem duas soluções de equilíbrio.

b) Efectuando a mudança de variável definida por $u=x+1$ e $v=y+1$, mostre que que o sistema se reduz a um outro que tem a origem como solução de equilíbrio.

c) Classifique quanto à estabilidade o ponto de equilíbrio (-1,-1).

Departamento de Matemática
Exame de época normal de Equações Diferenciais
Licenciatura em Matemática

Nome____**Nº de aluno**____________

Nota: A entrega da 3ª parte implica a anulação da classificação obtida nos mini-testes.

3ª parte

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Se o sistema $y' = Ay, A \in IR^{3\times 3}$, tem uma infinidade de pontos de equilíbrio e existe $\lambda \in \sigma(A) \cap IR^-$ tal que $m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$, então o sistema é instável.

v.p.f.

b) Se $AB = BA$, então $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}, \forall t \in IR$.

Considere-se o sistema $y' = (A+B)y$. Obviamente $e^{(A+B)t}$ é uma ~~m~~ solução do sistema dado que a exponencial matricial é uma matriz fundamental, ~~do~~ logo solução.

Vejamos que $e^{At}.e^{Bt}$ é solução e então nesse caso $e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}$, como pretendíamos demonstrar.

Como $AB = BA$ então $BA^k = A^k B$ logo

$$e^{At}.B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.B = B\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = B.e^{At}$$

seja $y' = e^{At}e^{Bt}$

$$\frac{d}{dt} e^{At}.e^{Bt} = A.e^{At}.e^{Bt} + e^{At}.Be^{Bt}$$
$$= A e^{At}.e^{Bt} + B.e^{At}.e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt}$$

Assim $e^{At}e^{Bt}$ é solução do sistema e portanto se $AB = BA$ então $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$, c.q.d.