Departamento de Matemática
Exame de recurso de Equações Diferenciais
Licenciatura em Matemática
9-07-02

Nome____ **Nº de aluno**______________

1ª parte-C

Para cada uma das questões seguintes assinale a <u>**única**</u> resposta certa.

1- Se o sistema $y'=Ay$, com $A \in IR^{3\times 3}$, $traço(A)=0$, é estável, mas não assimptoticamente estável, então:

☐ a matriz A é diagonalizável.

☐ $\det(A) \neq 0$.

☐ a matriz A pode não ser diagonalizável.

2- As funções e^t, t^2e^{4t}

☐ formam um sistema fundamental de soluções de $(D-1)(D-4)^2 y=0$.

☐ são soluções linearmente independentes, em IR, de $(D-1)(D-4)^2 y=0$.

☐ são soluções de $(D-1)(D-4)^3 y=0$.

3- A equação $\begin{vmatrix} t & \log t & y \\ 1 & 1/t & y' \\ 0 & -1/t^2 & y'' \end{vmatrix} = 0$

☐ admite $\{t, \log t\}$ como sistema fundamental de soluções.

☐ pode ser resolvida pelo método do polinómio anulador.

☐ está nas condições do Teorema de existência e unicidade em IR^+.

4- Se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para o sistema $y'=Ay$ $(A \in IR^{n\times n})$, então

☐ $\Phi(t)$ é solução de $y'=Ay$.

☐ $\Phi(t)=e^{At}\Phi^{-1}(0)$, $\forall t \in IR$.

☐ As soluções de $y'=Ay$ são da forma $y(t)=\Phi(t)v$ com $v \in IR^{n\times 1}$.

5- A equação diferencial $a(1+y^3)+bty^2y'=0$, $a,b \in IR$,

☐ nunca é uma equação exacta.

☐ pode ser uma equação exacta.

☐ é sempre uma equação exacta.

6- Se o sistema $y'=Ay$, $A \in IR^{4\times 4}$, é estável, mas não assimptoticamente estável, então

☐ $\forall \lambda \in \sigma(A)$ $m_a(\lambda)=m_g(\lambda)$.

☐ $\forall \lambda \in \sigma(A)$ $\mathrm{Re}(\lambda)=0$.

☐ a matriz A pode não ser diagonalizável.

Departamento de Matemática
Exame de recurso de Equações Diferenciais
Licenciatura em Matemática

2ª parte

Duração: 3h | 9 de Julho de 2002

1-a) Mostre que a equação diferencial $e^t \sec y - tg\, y + \frac{dy}{dt} = 0$ admite um factor integrante da forma $e^{-at}\cos y$ para algum valor de a.

b) Determine o integral geral da equação dada.

2-a) Mostre que a mudança de variável $(y \to u)$, definida por $y = t^n u$, transforma a equação diferencial $y' = t^{n-1} f(\frac{y}{t^n})$ numa equação de variáveis separáveis.

b) Determine uma família de soluções da equação diferencial $y' = t\left[\frac{1}{\sin(yt^{-2})} + 2yt^{-2}\right]$.

3- Considere a equação diferencial

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0\,, \qquad (1)$$

onde as funções $a_i, i = 1,\ldots,n$, são contínuas num certo intervalo $I \subset IR$. Prove que o conjunto das soluções em I de (1) forma um espaço vectorial real de dimensão n.

4- Considere o sistema diferencial $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 - y_1 \\ y_3' = 0 \end{cases}$.

a) Escreva o sistema na forma matricial $y' = Ay$.

b) Usando a definição de exponencial matricial, mostre que

$$e^{At} = I + (\sin t)A + (1 - \cos t)A^2.$$

c) Use a alínea anterior para escrever a solução geral do sistema dado.

d) Determine a solução particular de

$$y' = Ay + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

5- Considere o sistema $\begin{cases} x' = y(x^2 - y) \\ y' = -x(x^2 - y) \end{cases}$.

a) Determine os pontos de equilíbrio.

b) Faça um esboço do retrato de fase.

c) Comente as seguintes afirmações:

i) As órbitas do sistema são circunferências.

ii) As soluções do sistema são periódicas.

Departamento de Matemática
Exame de recurso de Equações Diferenciais
Licenciatura em Matemática

Nome____ **Nº de aluno**______________

Nota: A entrega da 3ª parte implica a anulação da classificação obtida nos mini-testes.

3ª parte

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Se $\forall \lambda \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R} \quad m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, $traço(A) < 0$, então o sistema $y' = Ay$ é estável.

v.p.f.

b) Se $A, P \in IR^{n \times n}$ e P é invertível, então $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P$.