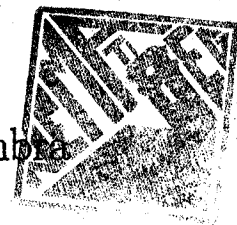


Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática
Exame - 12 de Junho de 2003



1.75 → nota dos testes

2.5 1. Considere a equação diferencial $(2ty + t^2y + \frac{y^3}{3})dt + (t^2 + y^2)dy = 0$.

- (a) Prove que admite um factor integrante que não é função de y .
- (b) Determine a solução geral.

1.5 2. Uma cultura tem inicialmente N_0 bactérias.

Ao fim de 6 horas, o número de bactérias triplicou.

Supondo que a taxa de crescimento é, em cada instante, proporcional ao número de bactérias existente, determine o tempo necessário para o número inicial duplicar.

2.5 3. Sabendo que $y_1 = 1 + 2t$ e $y_2 = 1 + t$ são soluções particulares da equação diferencial $t^2y'' - ty' + y = 1$, determine a respectiva solução geral.

4 4. Seja $y(t) = \begin{bmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ C_1e^{2t} - C_2e^{3t} \end{bmatrix}$ a solução geral do sistema $Y' = AY$.

- 0.5 (a) Determine e^{4t} .
- 2.5 (b) Determine $\frac{d}{dt}(e^{4t}) \Big|_{t=0}$.
- 1 (c) Determine A .
- 1 (d) Determine a solução particular de $Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz a condição inicial $Y(0) = 0$.
- 1 (e) Classifique, quanto à estabilidade, o ponto de equilíbrio $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ do sistema $Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2 5. Prove que se a matriz A tiver valores próprios de parte real positiva, então o sistema $Y' = AY$ é instável.

3.5 6. Considere o sistema bidimensional $\begin{cases} x' = -x - y^2 \\ y' = y - x^2 \end{cases}$.

- 0.5 (a) Determine os pontos de equilíbrio.
- 1 (b) Classifique a solução $x(t) = 0, y(t) = 0$ quanto à estabilidade.
- 1 (c) Determine a equação das órbitas.
- 1 (d) Prove que a função $H(x, y) = -xy - \frac{y^3}{3} + \frac{x^3}{3}$ é uma constante do movimento, isto é, $\frac{dH}{dt} = 0$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática
Exame - 12 de Junho de 2003



Nome:.....
Nº de Aluno:.....

Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando a sua resposta:

7. Se uma matriz $A_{4 \times 4}$ tem 3 valores próprios sobre o eixo imaginário e $\text{traço}(A) < 0$, então o sistema $Y' = AY$ é estável.

Falsa. Para que tal aconteça é necessário que a multiplicidade algébrica de λ seja igual à multiplicidade geométrica de λ , para λ valor próprio de A pertencente a $i\mathbb{R}$.

8. Se $AB = BA$ então $\Phi(t) = e^{At}e^{Bt}$ é uma matriz fundamental para o sistema $Y' = (A+B)Y$.

Verdadeira

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a única resposta certa.

9. Se o sistema $Y' = AY$ tem uma solução constante não nula, então
- a matriz A é invertível.
 - o sistema não pode ser assintoticamente estável.
 - o sistema é instável.
10. A função $y(t) = t^3 \cos(2t)$ admite um polinómio anulador de 4ª ordem.
- A função $y(t) = 1 + t^{-2}$ admite um polinómio anulador de 3ª ordem.
 - Se $t^3 \cos(2t)$ é solução de uma equação linear homogénea de coeficientes constantes, então o conjunto das soluções dessa equação forma um espaço vectorial de dimensão pelo menos 8.