Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática

Exame - 12 de Junho de 2003

(1.75) → nota dos testes

2.5 1. Considere a equação diferencial $(2ty + t^2y + \frac{y^3}{3})\mathrm{d}t + (t^2 + y^2)\mathrm{d}y = 0$.

(a) Prove que admite um factor integrante que não é função de y.

(b) Determine a solução geral.

1.5 2. Uma cultura tem inicialmente N_0 bactérias.

Ao fim de 6 horas, o número de bactérias triplicou.

Supondo que a taxa de crescimento é, em cada instante, proporcional ao número de bactérias existente, determine o tempo necessário para o número inicial duplicar.

2.5 3. Sabendo que $y_1 = 1 + 2t$ e $y_2 = 1 + t$ são soluções particulares da equação diferencial $t^2y'' - ty' + y = 1$, determine a respectiva solução geral.

4 4. Seja $y(t) = \begin{bmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ C_1e^{2t} - C_2e^{3t} \end{bmatrix}$ a solução geral do sistema $Y' = AY$.

0.5 (a) Determine e^{At}.

0.5 (b) Determine $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{At})\Big|_{t=0}$.

1 (c) Determine A.

1 (d) Determine a solução particular de $Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz a condição inicial $Y(0) = 0$.

1 (e) Classifique, quanto à estabilidade, o ponto de equilíbrio $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ do sistema $Y' = AY + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2 5. Prove que se a matriz A tiver valores próprios de parte real positiva, então o sistema $Y' = AY$ é instável.

3.5 6. Considere o sistema bidimensional $\begin{cases} x' = -x - y^2 \\ y' = y - x^2 \end{cases}$.

0.5 (a) Determine os pontos de equilíbrio.

1 (b) Classifique a solução $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ quanto à estabilidade.

1 (c) Determine a equação das órbitas.

1 (d) Prove que a função $H(x, y) = -xy - \frac{y^3}{3} + \frac{x^3}{3}$ é uma constante do movimento, isto é, $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática
Exame - 12 de Junho de 2003

Nome:...
Nº de Aluno:.....................................

Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando a sua resposta:

7. Se uma matriz $A_{4\times 4}$ tem 3 valores próprios sobre o eixo imaginário e traço$(A) < 0$, então o sistema $Y' = AY$ é estável.

Falsa. Para que tal aconteça é necessário que a multiplicidade algébrica de λ seja igual à multiplicidade geométrica de λ, para λ valor próprio de A pertencente a $i\mathbb{R}$.

8. Se $AB = BA$ então $\Phi(t) = e^{At}e^{Bt}$ é uma matriz fundamental para o sistema $Y' = (A+B)Y$.

Verdadeira

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a única resposta certa.

9. Se o sistema $Y' = AY$ tem uma solução constante não nula, então
   - ○ a matriz A é invertível.
   - ○ o sistema não pode ser assimptoticamente estável.
   - ⊗ o sistema é instável.

10. ⊗ A função $y(t) = t^3\cos(2t)$ admite um polinómio anulador de 4ª ordem.
   - ○ A função $y(t) = 1 + t^{-2}$ admite um polinómio anulador de 3ª ordem.
   - ○ Se $t^3\cos(2t)$ é solução de uma equação linear homogénea de coeficientes constantes, então o conjunto das soluções dessa equação forma um espaço vectorial de dimensão pelo menos 8.