Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Equações Diferenciais e Modelação
Licenciatura em Matemática

Época Normal | 13 de Janeiro de 2004 | Duração: [illegible]

Justifique resumidamente todas as respostas.

1. Considere a seguinte equação diferencial
$$y' + 2t\sin(t^2)y = \mathrm{e}^{\cos(t^2)}. \tag{1}$$
   (a) Prove que $y(t) = t\mathrm{e}^{\cos(t^2)}$ é solução de (1).
   (b) Qual o declive da recta tangente ao gráfico de y (solução da equação diferencial (1)) no ponto $(\sqrt{\pi}, 2)$?
   (c) Determine a solução geral de (1).

2. Um grupo de cientistas está a desenvolver um insecticida para mosquitos e para testar a sua eficácia, colocaram várias populações de mosquitos em diferentes caixas.
   Após algumas experiências, chegaram à conclusão que a quantidade de mosquitos vivos nas caixas variava de acordo com a seguinte equação diferencial
$$\frac{dP}{dt} = -10P \tag{2}$$
   onde $P(t)$ representa o número de mosquitos vivos no instante t (horas).
   (a) Resolva a equação diferencial (2).
   (b) Sabendo que numa das caixas colocaram 500 mosquitos vivos, determine quantos mosquitos ainda estavam vivos passadas 5 horas.
   (c) Comente a seguinte afirmação: "O insecticida desenvolvido é eficaz."
   (d) O mesmo grupo de cientistas desenvolveu paralelamente um outro insecticida para mosquitos e fazendo experiências análogas concluíram que o número de mosquitos na caixa era determinado pela equação diferencial
$$\frac{dP}{dt} = -(P-10)(1000-P).$$
   Sem resolver a equação diferencial anterior, indique qual dos dois insecticidas é mais eficaz a longo prazo.

3. Considere a seguinte família de equações diferenciais:
$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \tag{3}$$
   onde α, β são parâmetros reais.
   (a) Poderá alguma das equações diferenciais da família anterior admitir $\{\cos t, \mathrm{e}^{2t}\}$ como sistema fundamental de soluções?
   (b) Determine α e β por forma a que $y = \mathrm{e}^{2t}$ e $y = t\mathrm{e}^{2t}$ sejam soluções de (3).
   (c) Utilizando os valores obtidos na alínea anterior e o método do polinómio anulador, determine a solução geral de
$$y'' + \alpha y' + \beta y = 2 + \mathrm{e}^{2t}.$$
   NOTA: Caso não tenha resolvido a alínea b), considere $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

v.s.f.f.

4. Prove que se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$ então

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

5. Sabendo que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, determine

   (a) e^{At}.

   (b) $\left.\dfrac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\right|_{t=0}$.

   (c) a matriz dos coeficientes.

   (d) a solução particular de $y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

6. Para a função $f(t) = t \sin t$, calcule

   (a) $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ts} f''(t)\,dt$.

   (c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d}{dt}\left[\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) f(t)\right]\right\}$.