Departamento de Matemática da FCTUC

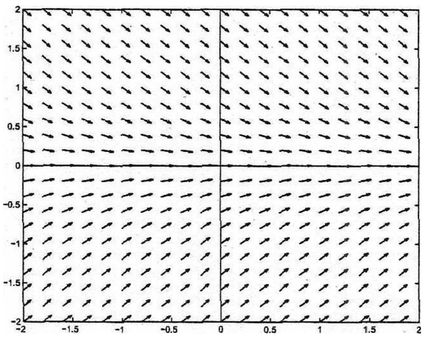
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

(Licenciatura em Matemática)

Duração: 1^h 24 de Outubro de 2005

---

(1) Qual das equações diferenciais a seguir indicadas pode corresponder ao seguinte campo de direcções ? Justifique sucintamente.



(a) $y' = y^2$ (b) $y' = -y^2$ (c) $y' = -y$ (d) $y' = t^2 + y^2$.

---

(2) Resolva a seguinte EDO de Bernoulli, no intervalo $]0, +\infty[$:

$$ty' + y = t^2 y^2 .$$

---

(3) Responda apenas a uma das alíneas (a) e (b) seguintes:

(a) Num determinado período da História, um certo tipo de vírus da gripe ameaçou perigosamente a população mundial. Verificou-se que o número de habitantes infectados pelo vírus cresceu sempre a uma taxa proporcional ao número de habitantes não infectados e, ao fim de 5 semanas, 50% da população mundial já tinha sido infectada. Considerando a população mundial constante, determine quantas semanas foram necessárias para que 75% da população tivesse sido infectada pelo vírus, supondo que inicialmente não havia indivíduos infectados.

(b) Sejam φ_1 e φ_2 duas soluções, num intervalo I, da EDO linear homogénea

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0 ,$$

onde a_1 e a_2 são funções contínuas em I. Designe $W(t)$ o wronskiano das funções φ_1 e φ_2, e seja $t_0 \in I$. Prove que

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds} , \quad \forall t \in I .$$

Fim

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

(Esboço de resolução da 1ª Frequência—24/10/2005)

---

(1) A única das equações diferenciais indicadas que pode corresponder ao campo de direcções da figura dada é a (c). Basta observar que para cada uma das restantes três EDO's o segundo membro é ou sempre não negativo (casos (a) e (d)) ou sempre não positivo (caso (b)) para quaisquer valores de t e y, pelo que ou todas as soluções de cada uma destas três EDO's são funções não decrescentes em todo o seu domínio (casos (a) e (d)), ou são funções não crescentes em todo o seu domínio (caso (b)), e isto obviamente não se verifica para as soluções correspondentes ao campo de direcções da figura dada. Por outro lado, as isoclínicas da EDO $y' = -y$ são (obviamente) rectas horizontais, e verificamos que, efectivamente, ao longo de qualquer recta horizontal (na faixa constituída pelos pontos (t,y) tais que $-2 < y < 2$) os "pequenos segmentos" que compõem o campo de direcções da EDO $y' = -y$ estão assentes em rectas cujos declive estão de acordo com os indicados pelo campo de direcções da figura.

---

(2) Começamos por dividir ambos os membros da EDO dada por t, o que permite reescrevê-la na forma

$$y' + \frac{1}{t}\,y = ty^2 \ .$$

Como esta EDO é de ordem $n = 2$, de acordo com a teoria geral desenvolvida para as EDO de Bernoulli, multiplicamos ambos os membros da equação por $y^{-n} = y^{-2}$, e em seguida efectuamos a mudança de variável dependente $y \longrightarrow u$ definida por $u = y^{1-n} = y^{-1}$. Então, $u' = \frac{du}{dt} = -y^{-2}\frac{dy}{dt} = -y^{-2}y'$, e obtém-se a EDO

$$u' - \frac{1}{t}\,u = -t \ , \qquad (*)$$

que é uma EDO linear de primeira ordem. Um factor integrante para esta EDO é

$$\mu(t) := e^{\int -\frac{1}{t}\,dt} = e^{-\ln t} = -\frac{1}{t} \ , \quad \text{para} \quad t \in]0,+\infty[\ .$$

Assim, multiplicando ambos os membros de (*) por $-\frac{1}{t}$, vem

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t}\,u\right) = 1 \ ,$$

donde $-\frac{1}{t}u = t + C$, onde C é uma constante real, i.e.,

$$u = -t(C+t) \ , \quad C \in \mathbb{R} \ .$$

Finalmente, "desfazendo" a mudança de variável, como $y = u^{-1}$, vem

$$y = -\frac{1}{t(C+t)} \ , \quad C \in \mathbb{R}^+ \ .$$

(Observe-se que se considera $C \in \mathbb{R}^+$ para que a solução esteja bem definida para tòdo o $t \in]0,+\infty[$.)

(continua no verso)

(3) A resolução da alínea (b) faz-se decalcando a demonstração do Teorem 3.3 do texto de apoio (pgs. 55-56), no caso n = 2. (Recorde-se que nas aulas teóricas apenas se fez a demonstração para n = 2.)

Para resolver (a), começamos por definir

$$N(t) := \text{número de habitantes infectados pelo vírus no instante } t\,,$$

onde a unidade de tempo considerada é a semana. De acordo com as hipóteses indicadas no enunciado, designando por N_0 o tamanho da população mundial, tem-se

$$N'(t) = k(N_0 - N(t))\,, \quad N(5) = \frac{N_0}{2}\,, \quad N(0) = 0\,,$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Pretende-se determinar o instante t^* tal que

$$N(t^*) = \frac{3N_0}{4}.$$

Começamos por resolver a EDO $N'(t) = k(N_0 - N(t))$, que é de variáveis separáveis. (Note-se que esta EDO também é linear de primeira ordem.) Podemos considerar que $N(t) < N_0$ para todo o instante t (uma vez que, obviamente, é $N(t) \leq N_0$ para todo o t e, como estamos interessados em determinar o instante t^* onde $N(t)$ toma o valor $\frac{3}{4}N_0$, então podemos considerar que procuramos a solução num intervalo que contém t^* e tal que $N(t) < N_0$ para todo o instante t nesse intervalo). Assim, podemos escrever sucessivamente

$$\begin{aligned}
\frac{N'(t)}{N_0 - N(t)} = k \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{N'(t)}{N_0 - N(t)} = kt + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad -\ln\left(N_0 - N(t)\right) = kt + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad N_0 - N(t) = c\,e^{-kt}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Usando a condição $N(0) = 0$, obtém-se $c = N_0$, logo

$$N(t) = N_0\left(1 - e^{-kt}\right)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Para determinar o valor da constante k usamos a condição $N(5) = \frac{N_0}{2}$. Assim,

$$\frac{N_0}{2} = N(5) = N_0\left(1 - e^{-5k}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{-5k} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{5}\,.$$

Finalmente, podemos determinar o instante t^* pretendido. De facto, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{3N_0}{4} = N(t^*) = N_0\left(1 - e^{-kt^*}\right) \quad &\Rightarrow \quad e^{-kt^*} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad kt^* = 2\ln 2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\ln 2}{5}\,t^* = 2\ln 2 \quad \Rightarrow \quad t^* = 10\,.
\end{aligned}$$

Conclui-se que foram necessárias 10 semanas para que 75% da população tivesse ficado infectada.

FIM