DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

(Licenciatura em Matemática)

Duração: 1^h 24 de Novembro de 2005

---

(1) Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t & \text{se } t \geq \frac{\pi}{2} . \end{cases}$$

(a) Justifique que f se exprime em termos da função de Heaviside por

$$f(t) = \sin\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot H\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right) \ , \quad t \geq 0 \, ,$$

e usando esta representação verifique que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1} \, , \quad s > 0 \, .$$

(b) Utilizando a transformada de Laplace, resolva em $[0, +\infty[$ o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y''' = f(t) \, , \\ y(0) = 0 \, , \quad y'(0) = 1 \, , \quad y''(0) = 0 \, . \end{cases}$$

Nota: Pode usar a decomposição $\dfrac{1}{s^3(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{s}{s^2+1}$.

---

(2) A posição em cada instante t, $x(t) \equiv x_{\omega,\gamma}(t)$, de um determinada massa oscilante num certo sistema físico, sobre a qual actua uma força exterior periódica $F(t) := F_0 \sin(\gamma t)$, é descrita pelo problema de valores iniciais

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \sin(\gamma t) \, , \quad x(0) = x'(0) = 0 \, , \qquad \text{(I)}$$

onde F_0, ω e γ são constantes reais positivas. A $\gamma/2\pi$ chama-se frequência da força exterior F, e a $\omega/2\pi$ chama-se frequência da vibração *livre* da massa.

(a) Usando o método do polinómio anulador, mostre que se $\gamma \neq \omega$ então a posição da massa em cada instante t é dada por

$$x_{\omega,\gamma}(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \left(\omega \sin(\gamma t) - \gamma \sin(\omega t)\right) . \qquad \text{(II)}$$

(b) A expressão (II) não está definida para $\gamma = \omega$, mas o seu valor-limite quando $\gamma \to \omega$ existe, i.e., existe $x_\omega(t) := \lim_{\gamma \to \omega} x_{\omega,\gamma}(t)$. Usando a regra de l'Hôpital (ou por qualquer outro processo!), mostre que

$$x_\omega(t) = \frac{F_0}{2\omega^2} \left(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)\right) .$$

(c) Verifique que a função x_ω indicada em (b) é a solução do problema (I) quando $\gamma = \omega$, e justifique a seguinte afirmação: "Quando a frequência da força exterior $(\gamma/2\pi)$ coincide com a frequência da vibração livre da massa $(\omega/2\pi)$, então à medida que o tempo t aumenta os deslocamentos da massa podem tornar-se arbitrariamente grandes". (Esta afirmação traduz o chamado fenómeno de ressonância.)

Sugestão: Calcule $x_\omega(t_n)$ para $t_n := n\pi/\omega$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

FIM