DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

(Licenciatura em Matemática)

Duração: 1^{h} 19 de Dezembro de 2005

---

(1) (a) Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y_1' & = & y_1 + 2y_2 \\ y_2' & = & -y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad , \quad y_1(0) = 0 \ , \quad y_2(0) = 1 \ .$$

(b) Determine e^{At}, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

---

(2) Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} y'' + z & - & 0 \\ z'' + y & = & \cos t \ . \end{cases}$$

introduzindo 4 variáveis dependentes y_1, y_2, y_3, y_4 de modo adequado, determine uma matriz A E $\mathbb{R}^{4,4}$ e um vector coluna $\mathbf{b}(t)$ E $\mathbb{R}^4$ tais que as soluções y e z do sistema anterior se possam obter a partir das componentes das soluções y $\equiv \mathbf{y}(t) = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4]^T$ do sistema diferencial

$$\mathbf{y}' = \mathrm{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \ .$$

Responda apenas a uma das questões (3) e (4).

---

(3) Seja $A(t) = [a_{i,j}(t)]_{i,j=1}^n$ uma matriz cujas entradas $a_{i,j}(t)$ são funções contínuas num intervalo limitado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $\mathbf{b}(t) = [b_j(t)]_{j=1}^n$ um vector (coluna) cujas componentes $b_j(t)$ são também funções contínuas em $[a,b]$. Sejam $t_0 \in]a,b[$ e $\mathbf{y}^0$ E $\mathbb{R}^n$ e considere o problema linear de valores iniciais

$$\mathbf{y}' = A(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \ , \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \ . \qquad (*)$$

Seja $\{\mathbf{y}_k(t)\}_{k\geq 0}$ a sucessão de funções (vectoriais) definida recorrentemente por

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{y}^0 \ , \quad \mathbf{y}_{k+1}(t) = \mathbf{y}^0 + \int_{t_0}^t [A(s)\,\mathbf{y}_k(s) + \mathbf{b}(s)]\ ds \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots \ .$$

Supondo provado que esta sucessão $\{\mathbf{y}_k(t)\}_{k\geq 0}$ converge uniformemente em $[a,b]$ para uma solução, φ, do problema (*), mostre que esta solução é única.

. **Indicação:** Se 11, é outra solução de (*) em [o,b], então $\psi(t) = \mathbf{y}^0 + \int_{t_0}^t [A(s)\,\psi(s) + \mathbf{b}(s)]\ ds$ (justifique); mostre então que

$$\|\psi(t) - \mathbf{y}_{k+1}(t)\| \leq c\frac{(nL|t-t_0|)^k}{k!} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

para todo o $t \in [a,b]$, onde $c := \sup_{t\in[a,b]} \|\psi(t) - \mathbf{y}_1(t)\|$ e $L := \sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$.

Sugestão: Pode usar, sem demonstrar, a desigualdade seguinte, válida para qualquer vector coluna $\mathbf{v}(s) \in \mathbb{R}^n$ cujas componentes são funções (escalares) contínuas em [a,,b],

$$\left\| \int_{t_0}^t [A(s)\,\mathbf{v}(s)]\ ds \right\| \leq nL \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{v}(s)\|\ ds \right| \ , \quad t \in [a,b] \ .$$

---

(4) Considere o problema de Cauchy

$$y' = e^{2y} \ , \quad y(0) = 0 \ . \qquad (*)$$

(a) Justifique que $f(t,y) := e^{2y}$ é uma função lipschitziana a respeito da segunda variável em qualquer rectângulo limitado do plano $\mathbb{R}^2$.

(b) Usando o teorema de existência e unicidade de soluções, mostre que o problema (*) tem uma e uma só solução no intervalo $\mathbf{I} = \left[-\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}\right]$.

Sugestão. Considere o rectângulo $\Omega := \{(t,y)$ E $\mathbb{R}^2 : |t| \leq \frac{1}{2} \ , \ |y| \leq \frac{1}{2}\}$

(c) Resolva o problema (*) pelo método de separação de variáveis e conclua que a solução existe num intervalo maior.

FIM