Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO**

Exame (Licenciatura em Matemática) 12/01/2007

Duração: 2horas (Sem consulta)

**Não se apresenta a resolução completa de todos os problemas, mas apenas pistas para a resolução e o resultado a que devem chegar**

(A cotação de cada questão está indicada a vermelho e a resolução a azul.)

1. (1.5) Classifique e determine a solução geral da equação diferencial

$$y' - y\,\sin t = y^2\, e^{\cos t}.$$

Trata-se de uma equação de Bernoulli. Depois de multiplicar ambos os membros da equação por $y^{-2}$, faz-se a mudança de variável ($y \mapsto u$), definida por $u = -y^{-1}$, para obter a equação linear $u' + u\,\sin t = e^{\cos t}$. Resolvida esta equação, e tendo em conta a mudança de variável, obtêm-se a solução geral da equação dada, que é definida por $y^{-1}(t) = e^{\cos t}(-t + C)$, onde $C$ é uma constante real arbitrária.

2. (2.0) Faça um esboço da prova do seguinte resultado.

*O conjunto das soluções, num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de uma equação diferencial linear, homogénea, de ordem $n$, cujos coeficientes são funções contínuas em $I$, é um espaço vectorial real de dimensão $n$.*

A demonstração consiste em:

i) Provar que o conjunto $S_0(I)$, das soluções da equação diferencial, é um sub-espaço vectorial do e.v. das funções reais contínuas em $I$ (para as operações de adição e multiplicação escalar, $(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ e $(a\varphi)(t) = a\varphi(t)$);

ii) Provar que existe um isomorfismo entre os espaços vectoriais $S_0(I)$ e $\mathbb{R}^n$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & S_0(I) & \to & \mathbb{R}^n \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) \end{array},$$

onde $t_0 \in I$, define um tal isomorfismo. (A linearidade de $f$ decorre da sua definição e a bijectividade é consequência do teorema da existência e unicidade).

3. (1.5) Diga (sem exceder 12 linhas) que métodos conhece para resolver equações diferenciais lineares <u>homogéneas</u>, de ordem $n$ e em que condições se aplica cada um deles.

Se $n = 1$, pode usar-se o método do factor integrante ou, em alternativa, ter em conta que a equação é de varáveis separáveis.

Se $n > 1$ e todos os coeficientes são constantes, recorre-se às raízes do polinómio característico para construir um SFS.

Se $n > 1$ e há coeficientes variáveis, pode usar-se o método de abaixamento de ordem (também chamado método de D'Alembert), desde que sejam conhecidas $n - 1$ soluções da equação e uma delas não se anule em $I$.

4. (2.0)

   (a) Use o método do polinómio anulador para resolver a seguinte equação diferencial

$$y'' - y' = t^2 e^t. \tag{1}$$

   (b) Determine uma solução particular da equação

$$y'' - y' = 4. \tag{2}$$

   (c) Use os resultados das alíneas anteriores e o Princípio da Sobreposição para determine a solução geral da equação

$$y'' - y' = 2 - t^2 e^t. \tag{3}$$

(a) As equações diferenciais (1), (2) e (3) têm a mesma equação homogénea associada. A solução geral desta é definida por $y_H(t) = C_1 + C_2 e^t$, ($C_1$ e $C_2$ constantes reais arbitrárias), pois as raízes do polinómio característico são 0 e 1 (de multiplicidade 1).

Para determinar uma solução particular da equação (1):

i) Multiplica-se o polinómio anulador do segundo membro, $(D-1)^3$, a ambos os membros de (1), obtendo-se a equação linear homogénea de coeficientes constantes $D(D-1)^4 y = 0$, cuja solução geral é da forma:

$$\bar{y}(t) = y_H(t) + C_3 t e^t + C_4 t^2 e^t + C_5 t^3 e^t. \tag{4}$$

ii) Determina-se o valor das constantes $C_3, C_4$ e $C_5$, de forma a que $y_q(t) = C_3 t e^t + C_4 t^2 e^t + C_5 t^3 e^t$, seja solução de (1).

A solução geral de (1) é definida por: $y(t) = y_H(t) + 2te^t - t^2 e^t + \frac{1}{3} t^3 e^t$.

(b) basta notar que a função $-4t$ é uma solução particular da equação (2). Então, a sua solução geral é definida por $y(t) = y_H(t) - 4t$.

(c) Basta notar que o segundo membro da equação (3) é uma combinação linear dos segundos membros das duas equações anteriores ($2 - t^2 e^t = \frac{1}{2} 4 + (-1) t^2 e^t$) e aplicar o Princípio da Sobreposição para obter uma solução particular da equação dada. A sua solução geral é definida por $y(t) = y_H(t) - 2t - 2te^t + t^2 e^t - \frac{1}{3} t^3 e^t$.

5. (2.0) Para o sistema de equações diferenciais $Y' = AY + B(t)$, sabe-se que

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a matriz $A$ dos coeficientes.

   (b) Classifique o sistema homogéneo quanto à estabilidade.

   (c) Determine a solução particular do sistema completo que satisfaz a condição inicial $Y(0) = 0$.

(a) - Para determine a matriz $A$ dos coeficientes, basta ter em conta que $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$ e, portanto, fazendo $t = 0$, tem-se que $A = \frac{d}{dt}(e^{At})|_{t=0}$. Então basta derivar a matriz dada e fazer $t = 0$. Obtêm-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) - A matriz $A$ é triangular, logo os seus valores próprios são os elementos da diagonal. Tendo um valor próprio positivo ($\lambda = 2$), o sistema é instável.

(c) - Basta usar a fórmula $Y(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)\,ds$, tendo em conta que neste caso $B(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e que $e^{A(t-s)}$ se obtém da expressão de $e^{At}$, substituindo $t$ por $t-s$. O resultado é:

$$Y(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2t} - 2t - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. (2.0)

(a) Classifique e resolva a equação diferencial de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

(b) Que relação existe entre a equação anterior e o seguinte sistema de equações diferenciais?

$$\begin{cases} x' &= x^2+y^2 \\ y' &= 2xy \end{cases}.$$

(c) Determine os pontos de equilíbrio e a equação das órbitas do sistema anterior.

(d) Faça um esboço do retrato de fase do sistema

$$\begin{cases} x' &= 2x-y \\ y' &= 0 \end{cases}.$$

(a) - A equação é homogénea, pois o segundo membro é uma função homogénea de grau zero. Para a resolver, faz-se a mudança de variável ($y \mapsto u$), definida por $u = \frac{y}{x}$ (o que implica $y' = xu' + u$), para obter a equação de variáveis separadas $\frac{1+u^2}{u-u^3}\,du = \frac{1}{x}\,dx$. Resolvida esta equação, e tendo em conta a mudança de variável, obtêm-se a solução geral da equação dada, que é definida implicitamente por $\frac{y^2}{x^2-y^2} = Cx$, onde $C$ é uma constante real arbitrária.

(b) - A equação da alínea (a) é a equação das órbitas do sistema.

(c) - Só há um ponto de equilíbrio $(0,0)$. A equação das órbitas do sistema é a equação da alínea (a).

(d) - Há um número infinito de pontos de equilíbrio que são todos os pontos da recta $y = 2x$. Uma vez que $y' = 0$, a equação das órbitas é $\frac{dy}{dx} = 0$ e, portanto, $y(x)$ é constante. O retrato de fase é constituído pelos pontos críticos e pelas restantes órbitas. Estas são semi-rectas horizontais, orientadas para a direita (respectivamente, para a esquerda) se estão à direita (respectivamente, à esquerda) da recta $y = 2x$.

7. (1.0) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Se $A$ é de ordem ímpar e se o sistema $Y' = AY$ é estável e só tem um ponto de equilíbrio, então $A$ tem necessariamente um valor próprio negativo.

   (b) Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ não tem valores próprios de parte real negativa, então $Y' = AY$ é instável.

   (a) Se $A$ é de ordem ímpar, então existe um número ímpar de valores próprios reais (já que os valores próprios complexos aparecem em pares conjugados). 0 não é valor próprio de $A$, caso contrário haveria vários pontos de equilíbrio. Também não pode haver valores próprios positivos pois o sistema é estável. Portanto $A$ tem necessariamente um valor próprio negativo e, portanto, a afirmação é verdadeira.

   (b) Se $A$ tiver 2 pares de valores próprios distintos, situados no eixo imaginário, então $A$ está nas condições dadas e, no entanto o sistema é estável. Logo, a afirmação é falsa.