Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Mini-teste 1 (Licenciatura em Matemática) 12/01/2007

Duração: 15^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ____________________

Número de estudante: ____________________

Assinatura do Professor: ____________________ *Classificação:* ________ *valores*

Nota: cada resposta correcta vale 0.25 *valores*; cada resposta errada desconta 0.25/4.

---

1. O campo de direcções (na região rectangular $[-4,4] \times [-4,4]$) representado na figura 1 corresponde à equação diferencial

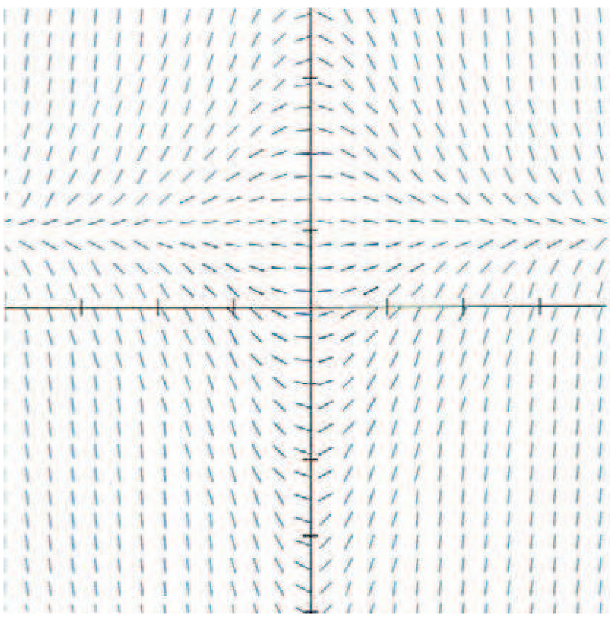

Figure 1:

■ $y' = t(1-y)$;

☐ $y' = 1-y$;

☐ $y' = t(1-y)^2$;

(continua no verso)

2. Apenas uma das afirmações seguintes está correcta. Qual?

- ☐ A equação $(t^2 + y^2)y' = t^2y^2$ é homogénea;
- ■ A equação $t^2y' = t^4y - y^{-4}$ é de Bernoulli;
- ☐ A equação $yy' = t^2y + e^t$ é linear.

3. Considere a equação diferencial de 1ª ordem $y' = f(t, y)$.

- ☐ Uma família de soluções, dependente de um parâmetro arbitrário, constitui a solução geral da equação;
- ☐ Uma solução singular obtém-se de uma família de soluções, dependente de um parâmetro arbitrário, atribuindo um valor particular ao parâmetro;
- ■ Uma solução particular obtém-se de uma família de soluções, dependente de um parâmetro arbitrário, atribuindo um valor particular ao parâmetro.

4. As isoclínicas da equação diferencial $y' = (t-1)^2 + y^2$ são

- ☐ rectas;
- ☐ elipses;
- ■ circunferências concêntricas.

FIM

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Teste 2 (Licenciatura em Matemática) 12/01/2007

Duração: 15^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ______________________

Assinatura do Professor: ______________________ *Classificação:* ______ *valores*

Nota: cada resposta correcta vale 0.25 *valores*; cada resposta errada desconta 0.25/4.

---

(1) Apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira. Qual?

- ☐ A equação diferencial $y'' - 5y' + 2y = e^{-t} + 5t + t^2 + \cos t$, não pode ser resolvida pelo método do polinómio anulador.
- ☐ A função $t^2 + y^2$ admite polinómio anulador.
- ■ A solução geral da equação $y' = f(t, y)$ pode estar definida de forma implícita.

(2) Se $y_1(t)$ for solução particular da equação $P(D)y = b_1(t)$, $y_2(t)$ for solução particular da equação $P(D)y = b_2(t)$ e $b_1(t) - b_2(t) \neq 0$, então

- ☐ $y_1(t) - y_2(t)$ é solução da equação $P(D)y = 0$;
- ■ $y_1(t) - y_2(t)$ é solução da equação $P(D)y = b_1(t) - b_2(t)$;
- ☐ $y_1(t) - y_2(t)$ é solução da equação $P(D)y = b_1(t) + b_2(t)$;

(3) As funções t^2e^{2t}, $e^{2t}\cos t$ são soluções

- ■ de uma equação diferencial linear de ordem pelo menos igual a 5;
- ☐ da equação $D^2(D-2)^3((D-1)^2+4)y = 0$;
- ☐ constituem um sistema fundamental de soluções da equação $(D-2)^3((D-2)^2+1)y = 0$;

(4) Para a EDO linear de segunda ordem

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t) , \qquad (1)$$

onde a_1, a_2 e b são funções contínuas em $\mathbb{R}$, uma das seguintes afirmações é verdadeira. Qual?

- ■ Se a_2 for a função identicamente nula, a equação pode ser resolvida pelo método de abaixamento de ordem;
- ☐ Se b não for a função identicamente nula, a equação pode ser resolvida pelo método do polinómio anulador;
- ☐ As soluções da equação formam um espaço vectorial real de dimensão 2.

FIM

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Teste 3 (Licenciatura em Matemática) 12/01/2007

Duração: 15^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ______________________

Assinatura do Professor: ______________________ *Classificação:* ______ *valores*

Nota: cada resposta correcta vale 0.25 *valores*; cada resposta errada desconta 0.25/4.

---

(1) Sabe-se que

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental para o sistema de equações diferenciais $Y' = AY$. Então,

- ☐ As linhas de $\Phi(t)$ constituem um sistema fundamental de soluções para o sistema.
- ☐ $\Phi(t)$ é uma solução do sistema.
- ■ $\Phi(t) = e^{At}$.

(2) Sejam A, B e P matrizes reais $n \times n$ e P invertível.

- ■ $Pe^{(P^{-1}AP)} = e^A P$.
- ☐ Se $AB = BA$, então $e^{(A+B)t} = e^{At} + e^{Bt}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- ☐ e^{At} pode ter determinante nulo, para algum valor real de t.

(3) Considere o sistema de equações diferenciais $Y' = AY$. Então,

- ☐ $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema, quaisquer que sejam o vector v e o escalar λ.
- ■ $e^{At}v$ é solução do sistema, qualquer que seja o vector v.
- ☐ Se λ é valor próprio de A, $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema, qualquer que seja o vector v.

(4) Considere o sistema $Y' = AY + b(t)$, onde b é uma função vectorial contínua, não nula e $Y_0 \neq 0$.

- ■ $Y(t) = e^{At}Y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,\mathrm{ds}$ é a solução particular do sistema completo, que satisfaz a condição inicial $Y(0) = Y_0$.
- ☐ $Y(t) = e^{At}Y_0 + \int_0^t e^{A(-s)}b(s)\,\mathrm{ds}$ é a solução particular do sistema completo, que satisfaz a condição inicial $Y(0) = Y_0$.
- ☐ $Y(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,\mathrm{ds}$ é a solução particular do sistema completo, que satisfaz a condição inicial $Y(0) = Y_0$.

FIM

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Teste 4 (Licenciatura em Matemática) 12/01/2007

Duração: 15^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ____________________

Assinatura do Professor: ____________________ *Classificação:* ______ *valores*

Nota: cada resposta correcta vale 0.25 *valores*; cada resposta errada desconta 0.25/4.

---

(1) Suponha que o sistema diferencial linear $Y' = AY$ tem coeficientes constantes e $\det(A) \neq 0$.

- ☐ Se A não tiver valores próprios negativos, então o sistema é instável.
- ☐ Se $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e o seu determinante e o seu traço forem ambos negativos, então o sistema é estável.
- ■ Se o sistema é assimptoticamente estável e $\det(A) < 0$, então a matriz A é de ordem ímpar.

(2) Considere o sistema diferencial bidimensional $Y' = f(Y)$.

- ☐ Uma órbita do sistema pode conter 2 pontos de equilíbrio.
- ■ O sistema pode ter um número infinito de pontos de equilíbrio.
- ☐ As órbitas do sistema são as soluções da equação das órbitas.

(3) Considere o sistema diferencial linear $Y' = AY$ com coeficientes constantes e bidimensional.

- ■ A equação das órbitas do sistema pode ser uma equação linear.
- ☐ O sistema tem apenas uma solução de equilíbrio.
- ☐ Se $\det(A) < 0$ então o sistema pode ser estável.

(continua no verso)

(4) As quatro figuras contidas no ficheiro retrato.doc representam retratos de fase de sistemas lineares bidimensionais. Que retrato de fase corresponde a um sistema cuja matriz dos coeficientes tem determinante negativo?

- ☐ Figura 1;
- ■ Figura 2;
- ☐ Figura 3;
- ☐ Figura 4.