Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

Exame de época normal (Licenciatura em Matemática) 20/06/2008

Duração: 2hora e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a vermelho)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (2.0) Considere a seguinte família de equações diferenciais:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \tag{1}$$

onde α, β são parâmetros reais.

(a) Poderá alguma das equações diferenciais da família anterior admitir $\{\cos t, e^{2t}\}$ como sistema fundamental de soluções?

(b) Determine α e β por forma a que $y = e^{2t}$ e $y = te^{2t}$ sejam soluções de (1).

(c) Utilizando os valores obtidos na alínea anterior, determine a solução geral de

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 1.$$

NOTA: Caso não tenha resolvido a alínea b), considere $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

2. (2.5) Considere o sistema diferencial $y' = Ay$.

(a) Prove que $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental se e só se $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ e $\det(\Phi(t)) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Escreva sobre a relevância da exponencial matricial, no contexto dos sistemas de equações diferenciais.

(c) Que métodos conhece para determinar as soluções do sistema?

3. (2.0) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Decomponha A na soma de duas matrizes que comutam.

(b) Calcule e^{At}, usando a definição de exponencial matricial.

(c) Determine a solução geral do sistema $y' = Ay$.

4. (2.0) Considere a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

(a) Classifique e resolva a equação.

(b) Que relação existe entre a equação dada e o seguinte sistema de equações diferenciais?

$$\begin{cases} x' &= x^2 + y^2 \\ y' &= 2xy \end{cases}.$$

(c) Determine os pontos de equilíbrio e a equação das órbitas do sistema anterior.

v.s.f.f.

5. (2.0)

   (a) Faça um esboço do retrato de fase do sistema

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= 0 \end{cases}$$

   e classifique os pontos de equilíbrio quanto à estabilidade.

   (b) Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações relativas ao sistema anterior, justificando a sua resposta.

      i. O sistema tem uma infinidade de pontos de equilíbrio.

      ii. Todos os pontos de equilíbrio são órbitas do sistema.

      iii. As órbitas são rectas horizontais.

6. (1.5) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Se A é de ordem ímpar e se o sistema $Y' = AY$ é estável e só tem um ponto de equilíbrio, então A tem necessariamente um valor próprio negativo.

   (b) Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ não tem valores próprios de parte real negativa, então $Y' = AY$ é instável.

7. (2.0) Para cada uma das alíneas seguintes, dê um exemplo de uma matriz A de ordem 2 tal que, para o sistema linear $y' = Ay$ se verifique o seguinte.

   (a) A origem seja um ponto sela.

   (b) Todas as órbitas convergem para a origem à medida que t cresce.

   (c) Haja uma infinidade de pontos de equilíbrios e o sistema seja instável.

   (d) Haja apenas um ponto de equilíbrio que seja assimptoticamente estável.

8. (2.0) Seleccione o assunto de que mais gostou nesta disciplina e fale sobre ele, evidenciando os aspectos mais relevantes mas sem exceder meia página.

Fim