DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

Frequência (Licenciatura em Matemática) 03/04/2008

Duração: 1hora e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a vermelho)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (1.0) Considere a equação diferencial $y' = y^2$.

   (a) Sendo y_0 uma constante real positiva, encontre uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial $y(1) = y_0$ e determine o seu intervalo de existência.

   (b) Encontre uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial $y(1) = 0$ e determine o seu intervalo de existência.

2. (1.0) Identifique e resolva a equação diferencial $y' + \frac{1}{t}\,y = t^2\,y^3$.

3. (1.0)

   (a) Determine uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes que admita como soluções as seguintes funções: $e^{2t}\cos t$, $e^t \sin 2t$, t^2.

   (b) Escreva a solução geral da equação diferencial da alínea anterior.

4. (1.0) Diga que métodos conhece para resolver equações diferenciais lineares, completas e de ordem n $(n \geq 1)$ e em que condições se pode aplicar cada um deles.

5. (1.0) Use um método à sua escolha para resolver a equação diferencial $y'' - y' = e^t$.

– Responda apenas a uma das duas questões seguintes –

6. (1.0) Considere a equação diferencial

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{(n-1)}(t)\,y' + a_n(t)\,y = 0,$$

   onde os coeficientes são funções contínuas num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Prove que o conjunto das soluções em I desta equação tem a estrutura de um espaço vectorial real de dimensão n.

7. (1.0) Considere a seguinte equação diferencial:

$$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0.$$

   (a) Quando se diz que esta equação é exacta?

   (b) Supondo que as funções M e N são contínuas e têm derivadas de primeira ordem contínuas, enuncie e demonstre uma condição necessária e suficiente para que a equação seja exacta.

Fim