Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Segunda Frequência (Licenciatura em Matemática) 04/06/2008

Duração: 1H 30M (Sem consulta)

Seja sucinta(o) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

(A cotação de cada questão está indicada a vermelho)

1. (1.5) A função matricial

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^t & -te^t \\ 3e^t & 3te^t - e^t \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental para o sistema de equações diferenciais $y' = Ay$.

   (a) Explique o significado da frase anterior.

   (b) Como estão relacionadas duas quaisquer matrizes fundamentais do sistema $y' = Ay$?

   (c) Prove que e^{At} é uma matriz fundamental do sistema $y' = Ay$.

   (d) Determine e^{At}.

   (e) Determine a matriz A dos coeficientes.

2. (1.5) Para o sistema de equações diferenciais $y' = Ay$, sabe-se que a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem valores próprios λ_1 e λ_2, com multiplicidades algébricas iguais a 1 e 2 respectivamente. Explique como construir um sistema fundamental de soluções do sistema, em função das possíveis multiplicidades geométricas dos valores próprios de A.

3. (1.5) Considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(x^2 + y^2 - 4) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x(x^2 + y^2 - 4) \end{cases}.$$

   (a) Determine as soluções de equilíbrio.

   (b) O que pode concluir sobre a estabilidade das soluções de equilíbrio, usando técnicas de linearização?

   (c) Determine a equação das órbitas.

   (d) Faça um esboço do retrato de fase do sistema.

   (e) Com base no retrato de fase, o que pode afirmar sobre a estabilidade das soluções de equilíbrio?

4. (1.5) Para cada uma das alíneas seguintes, dê um exemplo de uma matriz A de ordem 2 tal que, para o sistema linear $y' = Ay$ se verifique o seguinte.

   (a) A origem seja um centro.

   (b) A origem seja um ponto sela.

   (c) A origem seja assimptoticamente estável.

   (d) Todas as órbitas (com excepção da origem) se afastem da origem à medida que t cresce.

   (e) Todos os pontos do plano sejam pontos de equilíbrio.

   (f) Haja apenas uma recta de pontos de equilíbrio.

Fim.