Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações Diferenciais e Modelação

Exame de época normal (Licenciatura em Matemática) 19/01/2009

Duração (Partes I e II): 2horas e 30minutos (Cotação a vermelho)

Parte I

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = (y-1)^2$.
   - (a) Determine as isoclínicas e identifique aquelas que também são soluções.
   - (b) Faça um esboço do campo de direcções no interior do quadrado de lado 4, centrado na origem das coordenadas.
   - (c) Determine uma família de soluções.
   - (d) Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 2$.
   - (e) Haverá alguma solução da equação diferencial cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$?
   - (f) Qual é a solução geral da equação diferencial dada?

2. (2.0) Identifique e resolva a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$xy' - 2y = x^2y^2, \;\; x > 0.$$

3. (1.5) Considere a seguinte equação diferencial linear,

$$(D^2-4)^2\,(D^2+4)\,D^2\,y = 0.$$

   - (a) Classifique esta equação, quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem.
   - (b) Escreva a equação característica associada e determine as suas raízes e respectivas multiplicidades.
   - (c) Diga, justificando, qual é a a solução geral da equação diferencial.

4. (2.0)
   - (a) Use o método do polinómio anulador para determinar a solução geral da equação diferencial
   $$y'' - y' = e^x + 2.$$
   - (b) Sabendo que $\frac{1}{12}\,e^{4x}$ é uma solução particular da equação diferencial
   $$y'' - y' = e^{4x},$$
   use o "princípio da sobreposição" para determinar a solução geral da equação diferencial
   $$y'' - y' = 2e^x + 4 - 12\,e^{4x}.$$

v.s.f.f.

5. (1.5) Considere o sistema diferencial $y' = A\,y,\ \ y(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

   (a) Prove que e^{At} é uma matriz fundamental para o sistema.

   (b) Se $\Phi(t)$ é uma outra matriz fundamental para o mesmo sistema, escreva uma expressão que relacione $\Phi(t)$ com e^{At}.

6. (2.0) Sabendo que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\cos t \\ \cos t - \sin t & \sin t \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, determine

   (a) e^{At};

   (b) $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\big|_{t=0}$;

   (c) a matriz A dos coeficientes;

   (d) a solução particular de $y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

7. (2.0) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = y\ (4 - (x^2 + y^2)) \\ y' = -2x\ (4 - (x^2 + y^2)) \end{cases}.$$

   (a) Determine os pontos de equilíbrio.

   (b) Determine a equação das órbitas (ou trajectórias).

   (c) Faça um esboço do retrato de fase (com órbitas devidamente orientadas).

   (d) Comente a seguinte afirmação: As órbitas do sistema são elipses.

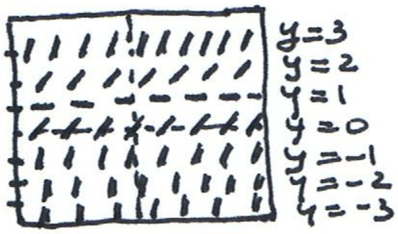
Fim

<u>Resoluçãо</u> (1ª parte)

1. (a) $(y-1)^2 = k$ (k const.) $\iff$ $\boxed{y = c \text{ (constante) eq. das isoclínicas}}$

$y = c$ é solução se e só se

$0 = (c-1)^2 \iff c = 1$. Então, apenas a isoclínica de equação $y=1$ é solução.

(b) 

$y' = (y-1)^2 \Rightarrow$ $y' = 0$ (quando $y=1$)
$y' > 0$ ($y \neq 1$)

(c) $y' = (y-1)^2$ é de variáveis separáveis

Resolver pelo método da separação das variáveis assumindo que $y \neq 1$ (para poder dividir por $(y-1)^2$.

(d) Usar a cond. inicial $y(0) = 2$ na sol. geral obtida em (c).

(e) Se o gráfico passa em $(0,1)$, então a solução satisfaz $y(0) = 1$. Verifica-se que nenhuma solução da família de soluções obtida em (c) satisfaz esta cond. inicial. Mas a solução $y(t) = 1$ obtida em (a) satisfaz esta condição.

(f) A solução geral é obtida juntando a solução constante $y(t) = 1$ à família de soluções obtida em (c).

2. $y' - \frac{2}{x} y = x y^2$ é de Bernoulli (2)

$y^{-2} y' - \frac{2}{x} y^{-1} = x$ M. variável $(y \to u)$ definida por $y^{-1} = u \Rightarrow -y^{-2} y' = u'$

Então, $-u' - \frac{2}{x} u = x$ é linear ...

3. (a) 8ª ordem, coef. constantes, homogénea

(b) $(r^2-4)^2 (r^2+4) r^2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 (r+2)^2 (r^2+4) r^2 = 0$

Raízes:

$r = 2$ (mul 2)

$r = -2$ (mul 2)

$r = \pm 2i$ (mul 1)

$r = 0$ (mul 2)

(c) A sol. geral é qualquer comb. linear do S.F.S.

$\{1, t, e^{2t}, t e^{2t}, e^{-2t}, t e^{-2t}, \cos 2t, \sin 2t\}$

4 (a) $(D^2 - D) y = e^x + 2 \Leftrightarrow D(D-1) y = e^x + 2$

$r(r-1) = 0$ eq caract. $\Rightarrow \{1, e^x\}$ SFS eq. homog. assoc.

$b(x) = e^x + 2 \Rightarrow Q(D) = D(D-1)$

Basta usar o mét. do polin. anulador ...

(b) Como se relacionam os 2.os membros das 3 equações? Note que

$2e^x + 4 - 12 e^{4x} = \underset{\uparrow}{2}(e^x + 2) + \underset{\uparrow}{(-12)} e^{4x}$

Então, se $y_p(x)$ é a sol. particular da equação encontrada em (a), tem-se que

$$2y_p(x) + (-12)\,\frac{1}{12}\,e^{4x}$$ é sol. particular

da 3ª equação. Logo

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + 2y_p(x) - e^{4x}$$, C_1, C_2 const. arb.

é a sol. geral pedida.

5. Demonstrações feitas nas aulas

6. (a) $e^{At} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)$

(b) $\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0} = \left.A\,e^{At}\right|_{t=0} = A$

(c) Basta usar (a) e (b)

(d) Usar o resultado de (a) e a fórmula

$$y_p(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\,b(s)\,ds$$

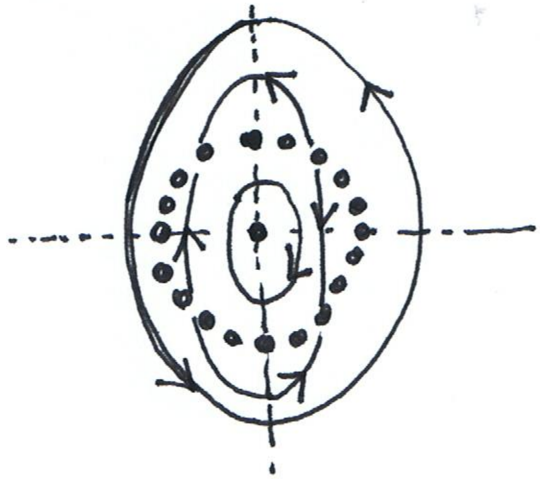
com $y(0)=0$, $b(s) = [1 \;\; 1]^T$.

7. (a) $\{(0,0)\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2=4\}$

(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$ variáveis separáveis

Sol. geral $\frac{y^2}{2} + x^2 = C$ (elipses)

(c)



(d) Há órbitas que são pontos (os pontos de equilíbrio) e outras que são porções de elipses (mas não elipses completas (sempre que uma elipse intersecta pontos de equilíbrio)

A afirmação é falsa.