Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações Diferenciais e Modelação

Exame normal (Licenciatura em Matemática) 19/01/2009

Duração total (Parte I + Parte II): 2hora e 30minutos (Cotação a vermelho)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ____________________ *Classificação:* ______ *valores*

Segunda Parte

As questões seguintes são de escolha múltipla. Escolha 6 delas e para cada uma assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

1. (0.5) A solução geral da equação diferencial $y'' + y = -2\sin x$ é

   - ☐ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.
   - ☐ $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \sin x + \cos x$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.
   - ■ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x\cos x$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

   Justificação: A equação característica tem raízes $\pm i$ e a equação diferencial é completa.

2. (0.5) Apenas uma das seguintes equações diferenciais pode ser resolvida pelo método do polinómio anulador. Qual?

   - ☐ $y''' + y'' + 2y' - y = \sec x$.
   - ■ $y''' - 2y' = e^{-x} + x^2 e^{2x} + \cos 3x + 3$.
   - ☐ $y'' - xy' + y = e^{-x}$.

   Justificação: O segundo membro da primeira não admite polinómio anulador, a última tem coeficientes variáveis.

3. (0.5) As funções 1, x, x^2, e^{3x}, xe^{3x}, $e^x \cos 3x$

   - ☐ formam um sistema fundamental de soluções da equação diferencial $D^3(D-3)^2((D-1)^2+9)y = 0$.
   - ☐ são soluções de uma equação linear, homogénea, com coeficientes constantes e de sexta ordem.
   - ■ são soluções de uma equação linear, homogénea, com coeficientes constantes e de sétima ordem.

   Justificação: Falta a função $e^x \sin 3x$ para formarem um SFS.

4. (0.5) Apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira. Qual?

   - ☐ O polinómio diferencial $(D+1)^2 + D^4$ é o polinómio anulador da função $xe^{-x} + x^3$.
   - ■ As funções $e^x \sin x - 4e^{-x}\cos 4x$ e $e^x \cos x - 2e^{-x} \sin 4x$ têm o mesmo polinómio anulador.
   - ☐ O polinómio diferencial D^2 é o polinómio anulador da função x^{-3}.

   Justificação: $(D+1)^2 D^4$ é o polinómio anulador da função $xe^{-x} + x^3$. A função x^{-3} não admite polinómio anulador.

5. (0.5)

- ☐ e^A é invertível apenas quando A for invertível e, neste caso, $(e^A)^{-1} = e^{A^{-1}}$.
- ■ Se A é uma matriz escalar (i.e., $A = \lambda I_n$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$), então $e^{tB}e^{tA} = e^{tA}e^{tB}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- ☐ $det(e^A) = 1$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Justificação: Se $A = \lambda I_n$, então A comuta com qualquer matriz e, portanto, ...

6. (0.5) Suponha que a matriz dos coeficientes do sistema linear bidimensional $y' = A\,y$ é constante e invertível.

- ☐ Se A não tiver valores próprios positivos, então o sistema é estável.
- ☐ Se o determinante de A for negativo, então o sistema é estável.
- ■ Se A não tiver valores próprios reais e o seu traço for positivo, então o sistema é instável.

Justificação: Sendo A invertível, A não tem o valor próprio nulo. Por ser 2×2, os valors próprios de A são: ambos reais, ou um par complexo conjugado. A primeira opção é falsa, pois A pode ter um par de valores próprios complexos, de parte real positiva (e neste caso o sistema é instável). A segunda opção é falsa, pois A pode ter um valor próprio real positivo e outro negativo (e neste caso o sistema é, também, instável). Na terceira opção, $\alpha \pm i\beta$ são os valores próprios e $tr(A) = 2\alpha > 0$ implica $\alpha > 0$, logo sistema instável.

7. (0.5) Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, 4 e 7 os valores próprios de A, com $\mathrm{m_a}(4) = 2$ e $\mathrm{m_g}(4) = 1$, v_1 e v_2 vectores próprios de A associados respectivamente a 4 e 7, e w um vector tal que w, v_1 e v_2 são linearmente independentes. Então,

- ☐ $c_1e^{4t}v_1+c_2e^{7t}v_2+c_3e^{4t}w$, com $c_i,\ i = 1, 2, 3$, constantes reais arbitrárias, é a solução geral de $Y' = AY$.
- ■ $e^{At}w$ é uma solução de $Y' = AY$.
- ☐ $e^{7t}v_2$ não é solução de $Y' = AY$.

Justificação: Recordando como se constroem soluções à custa de valores próprios e vectores próprios,conclui-se que as outras opções não são verdadeiras. A segunda corresponde a um resultado provado na aula: $e^{At}w$ é uma solução de $Y' = AY$, qualquer que seja o vector w.

8. (0.5) Considere o sistema diferencial bidimensional $y' = f(y)$.

- ☐ As soluções da equação das órbitas são órbitas do sistema.
- ■ Os pontos de equilíbrio do sistema são órbitas do sistema.
- ☐ O conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema constituem uma órbita do sistema.

Justificação: A equação das órbitas pode dar origem a curvas que contenham pontos de equilíbrio. Tais curvas não são órbitas (são a união dijunta de várias órbitas).