Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

Exame normal (Licenciatura em Matemática) 18/01/2010

Duração : 2horas e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (4.5)

   (a) O que é uma equação diferencial ordinária?

   (b) Qual é a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n?

   (c) Enuncie condições que garantam a existência de uma única solução, num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de uma equação diferencial linear satisfazendo certas condições iniciais.

   (d) Prove que, nas condições enunciadas na alínea anterior, o conjunto das soluções em I de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n forma um espaço vectorial real de dimensão n.

   (e) O que é um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea de ordem n?

   (f) Classifique quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem a seguinte equação diferencial linear

$$(D^2-9)^2((D+2)^2+2)^2\,y=0.$$

   (g) Determine um sistema fundamental de soluções e a solução geral da equação da alínea anterior.

2. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = y^2$.

   (a) Identifique a equação e determine uma família de soluções.

   (b) Determine todas as soluções singulares relativamente à família da alínea anterior.

   (c) Determine uma solução particular que satisfaça a condição inicial $y(0) = 3$ e o respectivo intervalo de existência.

   (d) Apresente argumentos que justifiquem o facto da solução da alínea anterior ser única.

   (e) Qual é a solução geral da equação diferencial?

3. (3.5) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, usando o método que achar mais apropriado para cada uma delas.

   (a) $y'' + \frac{1}{t}\,y' = t^{-1}$.

   (b) $y'' - 2y' + y = e^t + 1$.

   (c) $y'' - 2y' + y = t^{-1}\,e^t$.

   (d) $y'' - 2y' + y = -1 - e^t + 3\,t^{-1}\,e^t$.

4. (2.5) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Construa um sistema fundamental de soluções do sistema diferencial $y' = Ay$, envolvendo valores próprios da matriz dos coeficientes.

   (b) Calcule a solução particular do sistema $y' = Ay + b(t)$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, sabendo que $b(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \end{bmatrix}^\top$.

5. (3.0) Para cada um dos sistemas diferenciais:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} y \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} x' &= y\,(x - y^2) \\ y' &= -x(x - y^2) \end{cases} \qquad (2)\ ,$$

   (a) determine os pontos de equilíbrio.

   (b) determine a equação das trajectórias.

   (c) faça um esboço do retrato de fase.

   (d) Comente a seguinte afirmação, relativa ao sistema diferencial não linear: exceptuando os pontos críticos, as trajectórias do sistema são circunferências centradas na origem do plano xoy.

6. (1.5) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) O polinómio diferencial $D^4\,(D+1)^2$ é o polinómio anulador das funções te^{-t} e t^3.

   (b) $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, quaisquer que sejam o vector v e o escalar λ.

   (c) $e^{At}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, qualquer que seja o vector v.

   (d) Se A é de ordem ímpar e se o sistema $y' = Ay$ é estável e só tem um ponto de equilíbrio, então A tem necessariamente um valor próprio negativo.

   (e) Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ não tem valores próprios de parte real negativa, então $y' = A\,y$ é instável.

   (f) Se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $y' = Ay$, então $\Phi^{-1}(t)$ é solução do sistema $Y' = -YA$.

Fim