Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

**Equações diferenciais e modelação**

Exame normal (Licenciatura em Matemática) 18/01/2010

Duração : 2horas e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

**Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.**

**Indicam-se algumas sugestões para a resolução. Para definições e demonstrações de resultados teóricos, consultar os apontamentos da disciplina.**

1. (4.5)

   (a) O que é uma equação diferencial ordinária?

   (b) Qual é a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem $n$?

   (c) Enuncie condições que garantam a existência de uma única solução, num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de uma equação diferencial linear satisfazendo certas condições iniciais.
   Usar o teorema da existência e unicidade para EDO lineares.

   (d) Prove que, nas condições enunciadas na alínea anterior, o conjunto das soluções em I de uma equação diferencial linear homogénea de ordem $n$ forma um espaço vectorial real de dimensão $n$.

   (e) O que é um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea de ordem $n$?

   (f) Classifique quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem a seguinte equação diferencial linear

   $$(D^2-9)^2((D+2)^2+2)^2\, y = 0.$$

   Coef. constantes, homogénea, ordem 8 (a ordem da ED é igual ao grau da correspondente equação característica).

   (g) Determine um sistema fundamental de soluções e a solução geral da equação da alínea anterior.
   Um SFS constrói-se à custa das raízes da equação característica e suas multiplicidades : $\pm 3$ (multiplicidade 2 cada), $-2 \pm i\sqrt{2}$ (multiplicidade 2 cada).

2. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = y^2$.

   (a) Identifique a equação e determine uma família de soluções.
   Equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis (possível para $y \neq 0$) e integrando obtem-se a família $\{y = \frac{-1}{t+C},\, C \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Determine soluções singulares relativamente à família da alínea anterior.
   A haver alguma solução singular, ela só pode ser a solução excluída no método usado na alínea anterior, i.e., $y = 0$. Como esta solução não está na família anterior, a unica solução singular relativamente a essa família é a solução trivial.

   (c) Determine uma solução particular que satisfaça a condição inicial $y(0) = 3$ e o respectivo intervalo de existência.
   Usando esta condição na família anterior, obtem-se $y(t) = \frac{-1}{(t-1/3)}$, com intervalo de existência $[-\infty, 1/3[$.

   (d) Apresente argumentos que justifiquem o facto da solução da alínea anterior ser única.
   Usar um teorema de existência e unicidade para EDO da forma $y' = f(t, y)$.

(e) Qual é a solução geral da equação diferencial?
$\{y = 0\} \cup \{y = \frac{-1}{t+C},\ C \in \mathbb{R}\}$.

3. (3.5) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, usando o método que achar mais apropriado para cada uma delas.

(a) $y'' + \frac{1}{t}\, y' = t^{-1}$.
Fazer a mudança de variável definida por $y' = z$ para transformar a EDO numa linear de ordem 1 e regressar à variável inicial. $\{y = C_1 + C_2 \ln \mid t \mid + t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

(b) $y'' - 2y' + y = e^t + 1$.
Solução geral da equação homogénea associada: $y_h(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$, com $C_1, C_2$ constantes reais arbitrárias. O segundo membro tem polinómio anulador $Q(D) = D(D-1)$. Basta usar o método do polinómio anulador, para obter: $\{y = C_1 e^t + C_2 t e^t + (1/2) t^2 e^t + 1,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

(c) $y'' - 2y' + y = t^{-1}\, e^t$.
O segundo membro não tem polinómio anulador, mas a equação pode ser resolvida pelo método da variação das constantes arbitrárias. Obtem-se: $\{y = C_1 e^t + C_2 t e^t + t e^t (\ln \mid t \mid -1),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

(d) $y'' - 2y' + y = -1 - e^t + 3\, t^{-1}\, e^t$.
Basta usar o princípio da sobreposição.

4. (2.5) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Construa um sistema fundamental de soluções do sistema diferencial $y' = Ay$, envolvendo valores próprios da matriz dos coeficientes.
A matriz só tem um valor próprio $\lambda = 2$. É necessário construir vectores próprios generalizados e usar a "fórmula mágica" para obter, por exemplo, o seguinte SFS:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} 0 & te^{2t} & (1/2)t^2 e^{2t} \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(b) Calcule a solução particular do sistema $y' = Ay + b(t)$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, sabendo que $b(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \end{bmatrix}^\top$.
Com o SFS podemos construir uma matriz fundamental e aplicar uma fórmula conhecida para determinar soluções do sistema completo. A solução pedida é dada por:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 e^{2t} - 1/2 t - 1/4 \end{bmatrix}.$$

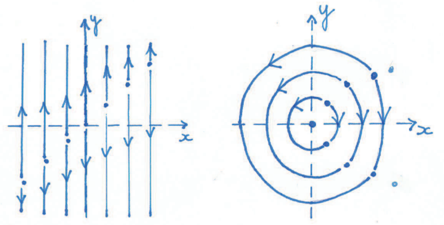
5. (3.0) Para cada um dos sistemas diferenciais:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} y \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} x' &= y\,(x - y^2) \\ y' &= -x(x - y^2) \end{cases} \qquad (2)\ ,$$

(a) determine os pontos de equilíbrio.
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$, respectivamente.

(b) determine a equação das trajectórias. $x = c$ e $x^2 + y^2 = k^2$, com $c, k \in \mathbb{R}$.

(c) faça um esboço do retrato de fase.




(d) Comente a seguinte afirmação, relativa ao sistema diferencial não linear: exceptuando os pontos críticos, as trajectórias do sistema são circunferências centradas na origem do plano $xoy$.

Há pontos de equilíbrio sobre todas as circunferências, logo nenhuma delas é uma órbita, caso contrário teríamos órbitas que se intersectam.

6. (1.5) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

(a) O polinómio diferencial $D^4\,(D+1)^2$ é o polinómio anulador das funções $te^{-t}$ e $t^3$.
Falso. $(D+1)^2$ é o polinómio anulador de $te^{-t}$ e $D^4$ é o polinómio anulador de $t^3$

(b) $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, quaisquer que sejam o vector $v$ e o escalar $\lambda$.
Falso. Isto só acontece se $\lambda$ for valor próprio de $A$ e $v$ vector próprio associado a $\lambda$.

(c) $e^{At}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, qualquer que seja o vector $v$. Verdadeiro. $e^{At}$ é uma matriz fundamental, logo $e^{At}v$ é uma combinação linear das colunas de $e^{At}$, que são soluções linearmente independentes.

(d) Se $A$ é de ordem ímpar e se o sistema $y' = Ay$ é estável e só tem um ponto de equilíbrio, então $A$ tem necessariamente um valor próprio negativo.
Verdadeiro. Um único ponto de equilíbrio implica que $A$ não tenha valores próprios nulos. Como os valores próprios complexos aparecem em pares conjugados, uma matriz de ordem ímpar tem necessariamnete um valor próprio real. Pelo facto do sistema ser estável, tal valor próprio terá que ser negativo.

(e) Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ não tem valores próprios de parte real negativa, então $y' = A\,y$ é instável.
Falso. Pode acontecer que todos os valores próprios estejam sobre o eixo imaginário e que as multiplicidades algébrica e geométrica coincidam. Neste caso, o sistema seria estável.

(f) Se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $y' = Ay$, então $\Phi^{-1}(t)$ é solução do sistema $Y' = -YA$.
Obtenha uma fórmula para $\dot{\Phi}^{-1}(t)$, derivando ambos os membros da igualdade $\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I, \forall t$. Depois use a definição de solução conjuntamente com o facto de $\Phi(t)$ ser uma matriz fundamental.

Fim