Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Mini-teste 1 (Licenciatura em Matemática) 7/10/2009

Duração: 20^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): *Classificação: 1.5 valores*

Resolução

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

A seguir, indico porque estão certas e erradas as várias afirmações. Mas, bastaria justificar porque está correcta a opção assinalada ou, em alternativa, bastaria justificar porque estão erradas as outras duas.

1. Considere a equação diferencial $y' = y^2 - 4$.

   ☒ Há exactamente duas isoclínicas que são gráficos de soluções.

   ☐ As isoclínicas são parábolas.

   ☐ A equação diferencial não tem soluções constantes.

   Justificação: As isoclínicas têm equação $y^2 - 4 = k$, onde k é constante. Logo, as isoclínicas são rectas horizontais. A segunda afirmação é incorrecta. Se $y(t) = c$ for uma solução constante, então $y'(t) = 0$. Mas, $y' = y^2 - 4$ implica que $y(t) = 2$ e $y(t) = -2$ são as únicas soluções constantes. Os seus gráficos são, obviamente isoclínicas.

2. A função $\mu(x) = x^{-1}$ é um factor integrante para esta equação diferencial.

   ☐ $y' - x^{-1}\,y = y^2$.

   ☒ $y' - x^{-1}\,y = x^2 e^x$.

   ☐ $y' + x^{-1}\,y = x$.

   Justificação: O factor integrante é usado para resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem, $y' + a(x)y = b(x)$, e é definido por $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$. A primeira equação não é linear, logo a primeira afirmação é falsa. As outras duas são lineares, mas só a segunda tem o factor integrante $e^{-\int x^{-1}\,dx} = x^{-1}$.

3. $y(t) = -\frac{1}{t+C}$, com $C \in \mathbb{R}$, define uma família de soluções da equação diferencial $y' = y^2$.

   ☐ A solução geral coincide com a família de soluções.

   ☒ $]-\infty, 1[$ é o intervalo de existência da solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$;

   ☐ $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ é o intervalo de existência da solução desta equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

   Justificação: A equação diferencial $y' = y^2$ admite a solução trivial $y(t) = 0$. Esta solução não pertence à família de soluções dada. Sendo a solução geral o conjunto de todas as soluções, a primeira afirmação é falsa.

   O intervalo de existência é, por definição um intervalo. A terceira afirmação é, por isso, falsa. Para confirmar que a segunda afirmação é verdadeira, calcula-se a solução particular que satisfaz a condição incial dada. Trata-se da função $y(t) = \frac{-1}{t-1}$, que é contínua e diferenciável excepto em $t = 1$. O intervalo de existência não pode conter este ponto, mas tem que conter o ponto $t = 0$ da condição inicial.