Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Mini-teste 1 (Licenciatura em Matemática) 13/10/2008

Duração: 15^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ______________

Classificação: ______ *valores*

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

1. Esta equação diferencial é simultaneamente linear e de variáveis separáveis.

   ☐ $y' + 4y = t\,;$

   ☐ $y' + ty = 4\,;$

   ☐ $y' + 4ty = t\,.$

   *J*ustificação:

2. Considere a equação diferencial $y' = y^2 - 4$.

   ☐ As isoclínicas desta equação diferencial são rectas horizontais e nenhuma delas é o gráfico de uma solução;

   ☐ As isoclínicas desta equação diferencial são rectas horizontais e duas delas são os gráficos de soluções;

   ☐ As isoclínicas desta equação diferencial são parábolas.

   *J*ustificação:

3. $y(t) = \sqrt[3]{\frac{-1}{3(t+C)}}$, com $C \in \mathbb{R}$, define uma família de soluções da equação diferencial $y' = y^4$.

- ☐ Esta equação diferencial não tem soluções cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 0)$;
- ☐ $]-\frac{1}{3}, +\infty[$ é o intervalo de existência da solução desta equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$;
- ☐ $]-\infty, -\frac{1}{3}[$ é o intervalo de existência da solução desta equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

Justificação:

(Fim)

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Mini-teste 1 (Licenciatura em Matemática) 7/10/2009

Duração: 20^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ______________ *Classificação:* ________ *valores*

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

1. Considere a equação diferencial $y' = y^2 - 4$.

   ☐ Há exactamente duas isoclínicas que são gráficos de soluções.

   ☐ As isoclínicas são parábolas.

   ☐ A equação diferencial não tem soluções constantes.

   Justificação:

2. A função $\mu(x) = x^{-1}$ é um factor integrante para esta equação diferencial.

   ☐ $y' - x^{-1}\, y = y^2$.

   ☐ $y' - x^{-1}\, y = x^2 e^x$.

   ☐ $y' + x^{-1}\, y = x$.

   Justificação:

v.s.f.f.

3. $y(t) = -\frac{1}{t+C}$, com $C \in \mathbb{R}$, define uma família de soluções da equação diferencial $y' = y^2$.

- ☐ A solução geral coincide com a família de soluções.
- ☐ $]-\infty, 1[$ é o intervalo de existência da solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$;
- ☐ $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ é o intervalo de existência da solução desta equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

Justificação:

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Mini-teste 2 (Licenciatura em Matemática) 26/11/2009

Duração: 20^{mn} (Sem consulta)

Nome (completo): ____

Número de estudante: ____________________

Classificação: ________ *valores*

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

1. Se $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, então

   ☐ $\Phi(t) = e^{At}$.

   ☐ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   ☐ $A = \Phi'(0)\,\Phi^{-1}(0)$.

   Justificação:

(continua no verso)

2. Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, 2 e 4 os valores próprios de A, com $\mathrm{m_a}(2) = 2$ e $\mathrm{m_g}(2) = 1$, v_1 e v_2 vectores próprios de A associados respectivamente a 2 e 4, e $v_3 \in \mathbb{R}^3$ um vector tal que v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes. Então, um sistema fundamental de soluções para o sistema $y' = Ay$ é:

   - ☐ $\{e^{2t}v_1,\ e^{4t}v_2,\ e^{2t}v_3\}$.
   - ☐ $\{e^{2t}v_1,\ e^{4t}v_2,\ e^{2t}(A-2I)v_3\}$.
   - ☐ $\{e^{At}v_1,\ e^{4t}v_2,\ e^{At}v_3\}$.

   Justificação:

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   - ☐ Se A é anti-simétrica (isto é, $A^\top = -A$), então, $\forall t \in \mathbb{R}$, e^{tA} é uma matriz ortogonal de determinante igual a 1.
   - ☐ Se $A^2 = A$, então $e^{tA} = I + e^t A$.
   - ☐ Se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é congruente com A (isto é, se existir uma matriz invertível P tal que $P^\top AP = B$), então $P^\top e^{tA} P = e^{tB}$.

   Justificação:

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

1ª Frequência (Licenciatura em Matemática) 27/10/2008

Duração: 1hora e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a vermelho)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = ty^2$.
   (a) Determine uma família de soluções.
   (b) Determine uma solução singular, relativamente à família da alínea anterior.
   (c) Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial $y(1) = 2$.
   (d) Diga qual é o intervalo de existência da solução da alínea anterior.
   (e) Qual é a solução geral da equação?

2. (1.0) A equação diferencial $y' + \frac{1}{t}\,y = t\,y^2$ é de Bernoulli. Resolva-a, depois de a transformar numa equação linear, mediante uma mudança de variáveis apropriada.

3. (2.0) Considere a seguinte equação diferencial linear
$$D((D+1)^2+4)^2 y = 10 - 50t.$$
   (a) Classifique esta equação quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem.
   (b) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
   (c) Use o método do polinómio anulador para determinar uma solução particular da equação dada.
   (d) Escreva a solução geral da equação dada.

4. (2.0) Considere a equação diferencial
$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = 0,$$
onde os coeficientes são funções contínuas num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
   (a) Prove que o conjunto das soluções em I desta equação tem a estrutura de um espaço vectorial real de dimensão n.
   (b) O que é um sistema fundamental de soluções, em I, para esta equação diferencial?

Fim

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Equações Diferenciais e Modelação
Licenciatura em Matemática

$2^{\underline{a}}$ Frequência   15 de Dezembro de 2008   Duração: 2h 30m

(A cotação está indicada a vermelho)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (2.0) Sabendo que $\{t^2, t^2 \ln t\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada à equação diferencial
$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = \ln t, \quad t > 0, \tag{1}$$
   (a) Construa um sistema de Lagrange para a equação (1) e diga porque razão esse sistema tem solução única.
   (b) Determine a solução geral de (1), usando o método da variação das constantes arbitrárias (também chamado método de Lagrange).

2. (1.0) Prove que se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, então
$$\mathrm{e}^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

3. (2.0) Sabendo que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, determine
   (a) e^{At};
   (b) $\left.\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{At}\right)\right|_{t=0}$;
   (c) a matriz A dos coeficientes;
   (d) a solução particular de $y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

4. (1.0) Seja A uma matriz $n \times n$, com todas as entradas iguais a 1.
   (a) Mostre que $A^k = n^{k-1}A, \ \forall k \geq 1$.
   (b) Se I representa a matriz identidade de ordem n, mostre que
$$e^{tA} = I + (\frac{e^{nt} - 1}{n})\, A.$$
   (c) Calcule o determinante da matriz e^A.

5. (1.0) Seja A uma matriz satisfazendo $A = UDU^{-1}$, onde
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine e^{tD}.
   (b) Determine e^{tA}.
   (c) Resolva o sistema diferencial $y' = B\,y$, onde B é a matriz de ordem 4 (diagonal por blocos) dada por
$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Fim

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

1ª Frequência (Licenciatura em Matemática) 04/11/2009

Duração: 1hora e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (1.0) Considere a equação diferencial $y' = y^2$.
   (a) Determine uma solução particular que satisfaça a condição inicial $y(1) = 1/2$ e o respectivo intervalo de existência.
   (b) Qual é a solução geral da equação diferencial?

2. (3.0) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, usando o método que achar mais apropriado.
   (a) $y' + \frac{1}{t}\, y = te^{2t}y^2$.
   (b) $y'' + 2y' + y = 2 - e^{-t}$.
   (c) $y'' + 2y' + y = t^{-1}\, e^{-t}$.
   (d) $y'' + 2y' + y = -2 + e^{-t} + 2\, t^{-1}\, e^{-t}$.

3. (1.0)
   (a) Classifique quanto aos coeficientes, ao segundo membro e à ordem a seguinte equação diferencial linear
   $$(D^2-4)^2((D+2)^2+1)^2\, y = 0.$$
   (b) Determine um sistema fundamental de soluções e a solução geral da equação da alínea anterior.
   (c) Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando a sua resposta.
      i. As funções $e^{-t}\cos 2t$, $e^{-t}\sin 2t$, $2e^{-t}\sin 2t - e^{-t}\cos 2t$ têm o mesmo polinómio anulador.
      ii. O conjunto $\{e^{-t}\cos 2t,\, te^{-t}\cos 2t,\, t^2e^{-t}\cos 2t\}$ é um sistema fundamental de soluções de alguma equação linear homogénea e de coeficientes constantes.

4. (1.0) Prove que se r_1 é uma raíz de multiplicidade 2 da equação característica associada à equação diferencial
   $$y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$
   então $\{e^{r_1t}, te^{r_1t}\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

5. (1.0) Sejam $y_1, \cdots, y_n$ funções que admitem derivadas contínuas até à ordem n inclusive, num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e suponha que o seu Wroskiano não se anula em I. Prove que $\{y_1, \cdots, y_n\}$ é um sistema fundamental de soluções, em I, da equação diferencial linear
   $$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) & y \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) & y' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Fim

Equações diferenciais e modelação

2ª Frequência (Licenciatura em Matemática) 16/12/2009

Duração: 1hora e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (1.0) Defina $e^{At}, com A \in \mathbb{R}^{n\times n}, t \in \mathbb{R}$, e indique as suas principais propriedades.

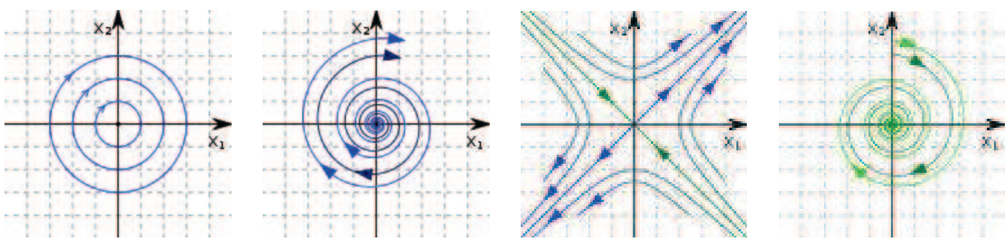
2. (1.0) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule e^{At} usando a definição e propriedades da exponencial matricial.

3. (1.0) Prove que $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, se e só se $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ e $\det(\Phi(t)) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

4. (1.5) Sabendo que $y(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix}$, com c_1 e c_2 constantes reais arbitrárias, define a solução geral do sistema $y' = Ay$,
   (a) determine e^{At}.
   (b) determine A.
   (c) determine a solução particular de $y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz $y(0) = 0$.

5. (1.5) Para cada um dos sistemas diferenciais:
$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y, \qquad \begin{cases} x' &= 2y\,(y - x^2) \\ y' &= y - x^2 \end{cases},$$
   (a) determine os pontos de equilíbrio.
   (b) determine a equação das trajectórias.
   (c) faça um esboço do retrato de fase.

6. (1.0) As quatro imagens seguintes representam o retrato de fase de quatro sistemas bidimensionais da forma $y' = Ay$, com $y = [x_1\ x_2]^\top$.



(1) (2) (3) (4)

   (a) Caracterize os sistemas correspondentes, quanto à estabilidade.
   (b) Associe cada retrato de fase a uma das quatro opções seguintes, contendo propriedades da matriz dos coeficientes.

(i)	traço$(A) < 0$, $\det(A) > 0$	(ii)	traço$(A) > 0$, $\det(A) > 0$
(iii)	traço$(A) = 0$, $\det(A) > 0$	(iv)	$\det(A) < 0$

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações Diferenciais e Modelação

Exame de época normal (Licenciatura em Matemática) 19/01/2009

Duração (Partes I e II): 2horas e 30minutos (Cotação a vermelho)

Parte I

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = (y-1)^2$.
   (a) Determine as isoclínicas e identifique aquelas que também são soluções.
   (b) Faça um esboço do campo de direcções no interior do quadrado de lado 4, centrado na origem das coordenadas.
   (c) Determine uma família de soluções.
   (d) Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 2$.
   (e) Haverá alguma solução da equação diferencial cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$?
   (f) Qual é a solução geral da equação diferencial dada?

2. (2.0) Identifique e resolva a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$xy' - 2y = x^2y^2, \;\; x > 0.$$

3. (1.5) Considere a seguinte equação diferencial linear,

$$(D^2-4)^2\,(D^2+4)\,D^2\,y = 0.$$

   (a) Classifique esta equação, quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem.
   (b) Escreva a equação característica associada e determine as suas raízes e respectivas multiplicidades.
   (c) Diga, justificando, qual é a a solução geral da equação diferencial.

4. (2.0)
   (a) Use o método do polinómio anulador para determinar a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y' = e^x + 2.$$

   (b) Sabendo que $\frac{1}{12}\,e^{4x}$ é uma solução particular da equação diferencial

$$y'' - y' = e^{4x},$$

   use o "princípio da sobreposição" para determinar a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y' = 2e^x + 4 - 12\,e^{4x}.$$

v.s.f.f.

5. (1.5) Considere o sistema diferencial $y' = A\,y,\ \ y(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

   (a) Prove que e^{At} é uma matriz fundamental para o sistema.

   (b) Se $\Phi(t)$ é uma outra matriz fundamental para o mesmo sistema, escreva uma expressão que relacione $\Phi(t)$ com e^{At}.

6. (2.0) Sabendo que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\cos t \\ \cos t - \sin t & \sin t \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental para o sistema $y' = Ay$, determine

   (a) e^{At};

   (b) $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\big|_{t=0}$;

   (c) a matriz A dos coeficientes;

   (d) a solução particular de $y' = Ay + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

7. (2.0) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = y\ (4 - (x^2 + y^2)) \\ y' = -2x\ (4 - (x^2 + y^2)) \end{cases}.$$

   (a) Determine os pontos de equilíbrio.

   (b) Determine a equação das órbitas (ou trajectórias).

   (c) Faça um esboço do retrato de fase (com órbitas devidamente orientadas).

   (d) Comente a seguinte afirmação: As órbitas do sistema são elipses.

Fim

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações Diferenciais e Modelação

Exame normal (Licenciatura em Matemática) 19/01/2009

Duração total (Parte I + Parte II): 2hora e 30minutos (Cotação a vermelho)

Nome (completo): ______________________________

Número de estudante: ____________________ *Classificação:* ______ *valores*

Segunda Parte

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

1. (0.5) A solução geral da equação diferencial $y'' + y = -2\sin x$ é

   - ☐ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.
   - ☐ $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \sin x + \cos x$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.
   - ☐ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

   Justificação

2. (0.5) Apenas uma das seguintes equações diferenciais pode ser resolvida pelo método do polinómio anulador. Qual?

   - ☐ $y''' + y'' + 2y' - y = \sec x$.
   - ☐ $y''' - 2y' = e^{-x} + x^2 e^{2x} + \cos 3x + 3$.
   - ☐ $y'' - xy' + y = e^{-x}$.

   Justificação

3. (0.5) As funções 1, x, x^2, e^{3x}, xe^{3x}, $e^x \cos 3x$

- ☐ formam um sistema fundamental de soluções da equação diferencial $D^3(D-3)^2((D-1)^2+9)y = 0$.
- ☐ são soluções de uma equação linear, homogénea, com coeficientes constantes e de sexta ordem.
- ☐ são soluções de uma equação linear, homogénea, com coeficientes constantes e de sétima ordem.

Justificação

4. (0.5) Apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira. Qual?

- ☐ O polinómio diferencial $(D+1)^2+D^4$ é o polinómio anulador da função $xe^{-x}+x^3$.
- ☐ As funções $e^x \sin x - 4e^{-x}\cos 4x$ e $e^x \cos x - 2e^{-x}\sin 4x$ têm o mesmo polinómio anulador.
- ☐ O polinómio diferencial D^2 é o polinómio anulador da função x^{-3}.

Justificação

5. (0.5)

- ☐ e^A é invertível apenas quando A for invertível e, neste caso, $(e^A)^{-1} = e^{A^{-1}}$.
- ☐ Se A é uma matriz escalar (i.e., $A = \lambda I_n$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$), então $e^{tB}e^{tA} = e^{tA}e^{tB}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- ☐ $det(e^A) = 1$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Justificação

6. (0.5) Suponha que a matriz dos coeficientes do sistema linear bidimensional $y' = A\,y$ é constante e invertível.

- ☐ Se A não tiver valores próprios positivos, então o sistema é estável.
- ☐ Se o determinante de A for negativo, então o sistema é estável.
- ☐ Se A não tiver valores próprios reais e o seu traço for positivo, então o sistema é instável.

Justificação

7. (0.5) Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, 4 e 7 os valores próprios de A, com $\mathrm{m_a}(4) = 2$ e $\mathrm{m_g}(4) = 1$, v_1 e v_2 vectores próprios de A associados respectivamente a 4 e 7, e w um vector tal que w, v_1 e v_2 são linearmente independentes. Então,

- ☐ $c_1 e^{4t} v_1 + c_2 e^{7t} v_2 + c_3 e^{4t} w$, com c_i, $i = 1, 2, 3$, constantes reais arbitrárias, é a solução geral de $Y' = AY$.
- ☐ $e^{At} w$ é uma solução de $Y' = AY$.
- ☐ $e^{7t} v_2$ não é solução de $Y' = AY$.

Justificação

8. (0.5) Considere o sistema diferencial bidimensional $y' = f(y)$.

- ☐ As soluções da equação das órbitas são órbitas do sistema.
- ☐ Os pontos de equilíbrio do sistema são órbitas do sistema.
- ☐ O conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema constituem uma órbita do sistema.

Justificação

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações Diferenciais e Modelação

Exame de recurso (Licenciatura em Matemática) 10/02/2009

Duração (Partes I e II): 2horas e 30minutos (Cotação a vermelho)

Parte I

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (3.0) Considere a equação diferencial $y' = (y+1)^2$.

   (a) Determine as isoclínicas e identifique aquelas que também são soluções.

   (b) Faça um esboço do campo de direcções no interior do quadrado de lado 4, centrado na origem das coordenadas.

   (c) No esboço da alínea anterior, represente os gráficos das soluções particulares que satisfazem as seguintes condições: $y(0) = 2$; $y(0) = -1$; $y(0) = -2$.

   (d) Determine uma família de soluções.

   (e) Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$ e diga qual é o seu intervalo de existência.

   (f) Haverá alguma solução da equação diferencial cujo gráfico passa pelo ponto $(0, -1)$?

   (g) Qual é a solução geral da equação diferencial dada?

2. (2.0) Identifique e resolva a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$3\,y' - \frac{2}{t}\,y = t\,y^{-2}, \quad t > 0.$$

3. (2.5)

   (a) Use o método do polinómio anulador para determinar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + y' = t + 2.$$

   (b) Sabendo que $\frac{1}{2}\,e^{4t}$ é uma solução particular da equação diferencial

$$y'' + y' = 10\,e^{4t},$$

   use o "princípio da sobreposição" para determinar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + y' = -2t - 4 + 5\,e^{4t}.$$

4. (2.0) Considere o sistema diferencial $y' = A\,y,\ y(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

   (a) Prove que se λ é um escalar (real ou complexo) e v um vector (real ou complexo), então $e^{\lambda t}\,v$ é uma solução do sistema (real ou complexa) se e só se v é um vector próprio de A, associado ao valor próprio λ.

   (b) Se λ for um valor próprio complexo da matriz A, construa duas soluções reais e linearmente independentes para o sistema diferencial.

v.s.f.f.

5. (2.5) Considere o sistema diferencial $y' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine

(a) e^{At};

(b) a solução geral do sistema homogéneo associado;

(c) a solução particular do sistema completo que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

6. (2.0) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = y\ (4 - (x^2 + y^2)) \\ y' = -x\ (4 - (x^2 + y^2)) \end{cases}.$$

(a) Determine os pontos de equilíbrio.

(b) Determine a equação das órbitas (ou trajectórias).

(c) Faça um esboço do retrato de fase (com órbitas devidamente orientadas).

(d) Comente a seguinte afirmação: As órbitas do sistema são circunferências.

Fim

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Equações Diferenciais e Modelação

Exame de recurso (Licenciatura em Matemática) 10/02/2009

Duração total (Parte I + Parte II): 2hora e 30minutos (Cotação a vermelho)

Nome (completo): ____________________________________

Número de estudante: ____________________ *Classificação:* _____ *valores*

Segunda Parte

As questões seguintes são de escolha múltipla. Para cada uma delas assinale a <u>única</u> resposta certa e justifique a razão da sua escolha.

1. (0.5) A solução geral da equação diferencial $y'' - y = -2\sin t$ é

   ☐ $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \sin t$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

   ☐ $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2\sin t$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

   ☐ $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \sin t$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

   Justificação

2. (0.5) Apenas uma das seguintes equações diferenciais pode ser resolvida pelo método do polinómio anulador. Qual?

   ☐ $t\,y''' + y'' + 2y' - y = t^2$.

   ☐ $y'' - y' = \frac{1}{t}$.

   ☐ $y''' - 2y' = e^{-2}$.

   Justificação

3. (0.5) As funções t^2, t^2e^{3t}, $e^t\cos 3t$

- ☐ formam um sistema fundamental de soluções de uma certa equação diferencial com coeficientes constantes.
- ☐ Admitem o mesmo polinómio anulador.
- ☐ são soluções de uma equação linear, homogénea, com coeficientes constantes e de oitava ordem.

Justificação

4. (0.5) O polinómio anulador da função $x^2e^{-x} - 2x^3$ é:

- ☐ $(D+1)^3 + D^4$.
- ☐ $(D+1)^2\,D^3$.
- ☐ $(D+1)^3\,D^4$.

Justificação

5. (0.5) Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, 4 e 7 os valores próprios de A, com $\mathrm{m_g}(4) = 2$, v_1 e v_2 vectores próprios de A associados a 4. Seja w tal que $\{v_1, v_2, w\}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes.

- ☐ $2e^{4t}v_1 + 4e^{4t}v_2$ é uma solução de $y' = Ay$.
- ☐ $c_1e^{4t}v_1 + c_2e^{4t}v_2 + c_3e^{7t}w$, com c_i, $i = 1, 2, 3$, constantes reais arbitrárias, é a solução geral de $y' = Ay$.
- ☐ $e^{7t}w$ é uma solução de $y' = Ay$.

Justificação

6. (0.5) Suponha que a matriz dos coeficientes do sistema linear bidimensional $y' = A\,y$ é constante e invertível.

- ☐ Se A não tiver valores próprios de parte real positiva, então o sistema é estável.
- ☐ Se o determinante de A for positivo, então o sistema é instável.
- ☐ Se A não tiver valores próprios reais e o seu traço for negativo, então o sistema é estável, mas não assimptoticamente.

Justificação

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

Exame normal (Licenciatura em Matemática) 18/01/2010

Duração : 2horas e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (4.5)
   (a) O que é uma equação diferencial ordinária?
   (b) Qual é a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n?
   (c) Enuncie condições que garantam a existência de uma única solução, num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de uma equação diferencial linear satisfazendo certas condições iniciais.
   (d) Prove que, nas condições enunciadas na alínea anterior, o conjunto das soluções em I de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n forma um espaço vectorial real de dimensão n.
   (e) O que é um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea de ordem n?
   (f) Classifique quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem a seguinte equação diferencial linear
   $$(D^2-9)^2((D+2)^2+2)^2\, y = 0.$$
   (g) Determine um sistema fundamental de soluções e a solução geral da equação da alínea anterior.

2. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = y^2$.
   (a) Identifique a equação e determine uma família de soluções.
   (b) Determine todas as soluções singulares relativamente à família da alínea anterior.
   (c) Determine uma solução particular que satisfaça a condição inicial $y(0) = 3$ e o respectivo intervalo de existência.
   (d) Apresente argumentos que justifiquem o facto da solução da alínea anterior ser única.
   (e) Qual é a solução geral da equação diferencial?

3. (3.5) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, usando o método que achar mais apropriado para cada uma delas.
   (a) $y'' + \frac{1}{t}\, y' = t^{-1}$.
   (b) $y'' - 2y' + y = e^t + 1$.
   (c) $y'' - 2y' + y = t^{-1}\, e^t$.
   (d) $y'' - 2y' + y = -1 - e^t + 3\, t^{-1}\, e^t$.

4. (2.5) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Construa um sistema fundamental de soluções do sistema diferencial $y' = Ay$, envolvendo valores próprios da matriz dos coeficientes.

   (b) Calcule a solução particular do sistema $y' = Ay + b(t)$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, sabendo que $b(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \end{bmatrix}^\top$.

5. (3.0) Para cada um dos sistemas diferenciais:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} y \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} x' &= y\,(x - y^2) \\ y' &= -x(x - y^2) \end{cases} \qquad (2)\ ,$$

   (a) determine os pontos de equilíbrio.

   (b) determine a equação das trajectórias.

   (c) faça um esboço do retrato de fase.

   (d) Comente a seguinte afirmação, relativa ao sistema diferencial não linear: exceptuando os pontos críticos, as trajectórias do sistema são circunferências centradas na origem do plano xoy.

6. (1.5) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) O polinómio diferencial $D^4\,(D+1)^2$ é o polinómio anulador das funções te^{-t} e t^3.

   (b) $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, quaisquer que sejam o vector v e o escalar λ.

   (c) $e^{At}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, qualquer que seja o vector v.

   (d) Se A é de ordem ímpar e se o sistema $y' = Ay$ é estável e só tem um ponto de equilíbrio, então A tem necessariamente um valor próprio negativo.

   (e) Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ não tem valores próprios de parte real negativa, então $y' = A\,y$ é instável.

   (f) Se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $y' = Ay$, então $\Phi^{-1}(t)$ é solução do sistema $Y' = -YA$.

Fim

Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

Exame de recurso (Licenciatura em Matemática) 02/02/2010

Duração : 2horas e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (5.5)

   (a) O que é uma equação diferencial ordinária?

   (b) Para uma equação diferencial da forma $y' = f(t, y)$, defina os seguintes conceitos:

      i. Solução.

      ii. Família de soluções.

      iii. Solução particular, relativamente a uma família de soluções.

      iv. Solução singular, relativamente a uma família de soluções.

      v. Solução geral.

      vi. Intervalo de existência de uma solução, que satisfaça a condição inicial $y(t_0) = y_0$.

   (c) Para a equação $y' = y^2$, apresente soluções que correspondam a cada um dos conceitos da alínea anterior.

   (d) Mostre que a seguinte equação diferencial é exacta e determine uma família de soluções.
$$(1 + xy^2) + (1 + x^2)\, y\, y' = 0$$

   (e) Considere a ED linear homogénea e de coeficientes constantes $P(D)\, y = 0$. Prove que se $r = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, são raízes da equação $P(r) = 0$, então $e^{\alpha t} \cos \beta t$ e $e^{\alpha t} \sin \beta t$ são soluções reais linearmente independentes da ED.

   (f) Determine um sistema fundamental de soluções e a solução geral da equação diferencial
$$(D^2 - 1)^2(D^2 + 1)^2((D + 1)^2 + 2)\, y = 0.$$

2. (3.5) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, usando o método que achar mais apropriado para cada uma delas.

   (a) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} - 1.$

   (b) $y'' - 4y' + 4y = t^{-1}\, e^{2t}.$

   (c) $y'' - 4y' + 4y = -1 + 2e^{2t} + 2\, t^{-1}\, e^{2t}.$

3. (3.0) Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$

   (a) Construa um sistema fundamental de soluções do sistema diferencial $y' = Ay$, envolvendo valores próprios da matriz dos coeficientes.

   (b) Calcule a solução particular do sistema $y' = Ay + b(t)$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, sabendo que $b(t) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

4. (3.0)

   (a) Para cada um dos sistemas diferenciais

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \qquad (1) \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (2y-2)\,(x+y^2) \\ y' & = & -2x(x+y^2) \end{array} \right. \qquad (2)\ ,$$

      i. determine os pontos de equilíbrio.
      ii. determine a equação das trajectórias.
      iii. faça um esboço do retrato de fase.

   (b) Comente as seguintes afirmações, relativas ao sistema diferencial (2):

      i. Nenhuma órbita do sistema é uma circunferência.
      ii. Uma das órbitas do sistema é uma parábola.

5. (2.0) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) O polinómio diferencial $D^3\,(D+1)^2$ é o polinómio anulador das funções $te^{-t}+t^2$ e $2te^{-t}-t^2$.

   (b) Se λ é um valor próprio da matriz A, então $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema $y' = Ay$, qualquer que seja o vector v.

   (c) Se A é de ordem par e invertível e se o sistema $y' = Ay$ é estável, mas não assimptoticamente, então A não tem valores próprios reais.

   (d) Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ não tem valores próprios de parte real positiva, então $y' = A\,y$ é estável.

   (e) Se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $y' = Ay$ e a matriz A é simétrica, então $\Phi^\top(t)$ (transposta de $\Phi(t)$) é solução do sistema $Y' = YA$.

Fim