Sugestões para a resolução do exame normal



1. (a) $$y' = ty^2 \overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} y^{-2}y' = t$$ (equação de variáveis separadas).

Integrando ambos os membros obtem-se a família de soluções

$$\left\{ y(t) = \frac{2}{C-t^2} \, , \; C \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) $y(t)=0$ é uma soluç (óbvio), $\checkmark$ $y(0)=0$ e $\mathbb{R}$ é o seu intervalo de existência

(c) $$y(t) = \frac{2}{c-t^2}$$

$$y(0)=1 \Longleftrightarrow 1 = \frac{2}{c} \Longleftrightarrow \boxed{C=2}\,.$$

A solução $y(t) = \dfrac{2}{2-t^2}$ satisfaz a condiç inicial.

$2-t^2=0 \Longleftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$. Logo, o intervalo de existência contém $t=0$ e não pode conter $\pm\sqrt{2}$: $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

(d) A soluç trivial não está contida na família de soluções, logo a sol. geral é:

$$\left\{ y(t) = \frac{2}{C-t^2} \, , \; C \in \mathbb{R} \right\} \cup \{ y(t) = 0 \}.$$

2. A equação é da forma $y' = f(x,y)$. Logo será homogénea se $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, $\forall \lambda$. Isto verifica-se.

Resolução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\,y/x}{1+(y/x)^2}.$$ Faça-se a mudança de variável $(y \to u)$ def. por $y/x = u \Leftrightarrow y = x.u$. Logo

$\dfrac{dy}{dx} = u + \dfrac{du}{dx}$. Subst. na equaç acima obtem-se a equaç de variáveis separáveis

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1+u^2} - u \iff \frac{du}{dx} = \frac{u-u^3}{1+u^2} \iff \frac{1+u^2}{u(1-u^2)}\,du = dx.$$

Basta integrar ambos os membros e ter em conta que

$$\frac{1+u^2}{u(1-u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{1+u} \Rightarrow A=B=-C=1, \text{ obtendo-se}$$

$$\ln|u| - \ln|1-u| + \ln|1+u| = x+k \quad , k \text{ const. arb.}$$

Finalmente, substituindo $u$ por $y/x$ obtem-se o pretendido.

3. (a), (b) (c) perguntas teóricas, consultar texto de disciplina.

(d) Coef. constantes, homogénea, ordem 8

Eq. caract.: $(r^2-9)^2(r^2+9)^2=0 \iff (r-3)^2(r+3)^2(r^2+9)^2=0$

Raizes:

$r=3$ (multipl. 2)

$r=-3$ (mult. 2)

$r=\pm 3i$ (mul 2)

$\{e^{3t}, te^{3t}, e^{-3t}, te^{-3t}, \cos 3t, \sin 3t, t\cos 3t, t\sin 3t\}$ S.F.S.

4. Sol. geral da eq. homog. associada:

Eq. caract. $r^2-2r+1=0 \iff (r-1)^2=0$. $r=1$ (mult. 2)

$\{e^x, xe^x\}$ S.F.S

$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$ , $c_1, c_2$ const. arb.

(a) pode ser resolvida pelo mét. do pol. anulador

$Q(D) = D(D-1)$ é o pol. anul. do 2.º membro

$y'' - 2y' + y = 2 - e^x \iff (D-1)^2 y = 2 - e^x$

Aplicando $D(D-1)$ a ambos os membros; obtem-se a eq.

$$D(D-1)^3 y = 0$$

cujas soluções $\bar{y}(x) = c_1 + \overbrace{c_2 e^x + c_3 x e^x}^{y_h(x)} + c_4 x^2 e^x$

contém uma sol. particular da eq. dada, obtida obrigando

$y_q(x) = c_1 + c_4 x^2 e^x$ a ser solução dessa equação. Derivando

$y_q$ duas vezes e substituindo na eq. dada obtém-se

$$y_p(x) = 2 - \frac{1}{2} x^2 e^x$$

A sol. geral: $\quad y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2 - \frac{1}{2} x^2 e^x$

(b) O 2º membro não tem pol. anulador. Usa-se o método de Lagrange:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^x + c_2'(x)\,(x e^x) = 0 \\ c_1'(x)\, e^x + c_2'(x)\,(e^x + x e^x) = x^{-1} e^x \end{cases} \qquad \text{(Sistema de Lagrange)}$$

Solução do sistema de Lagrange: $c_1' = -1$, $c_2' = +x^{-1}$. Então podemos considerar $c_1(x) = -x$, $c_2(x) = \ln|x|$ e

$y_p(x) = -x e^x + x \ln|x|\, e^x$ é uma sol. particular.

A sol. geral: $\quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

(c) O 2º membro é uma combinação linear dos 2.os membros das 2 equações anteriores, os 1.os membros são todos iguais, logo usamos o princípio da sobreposição.

Como $\quad -4 + 2e^x + 3x^{-1}e^x = -2(2 - e^x) + 3(x^{-1} e^x)$

a sol. geral é:

$$y(x) = y_h(x) + -2\left(2 - \frac{1}{2} x^2 e^x\right) + 3\left(-x e^x + x \ln|x|\, e^x\right).$$

5. (a) e (b) Consultar texto da disciplina.

6. (a) $A = 3I + B$ , $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $e^{At} = e^{3It} \cdot e^{Bt}$ (porque $I$ e $B$ comutam)

$$= e^{3t}I \cdot e^{Bt}$$

$$= e^{3t} e^{Bt} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 + t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B^k = 0 \ (k \geq 3) \Rightarrow e^{Bt} = I + Bt + B^2 \frac{t^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $e^{At}$ é uma matriz fundamental, logo

$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ , $c_1, c_2, c_3$ reais arbit. é a sol. geral.

(d) Basta aplicar a fórmula para a sol. que satisfaz a condição inicial dada $y(0) = y_0$

$$y(t) = e^{At} y_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} b(s) \, ds$$

e ter em conta que

$e^{At} y_0 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (1^{a}$ coluna de $e^{At})$ ,

$e^{-As} b(s) = s \cdot e^{-3s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \cdot (1^{a}$ coluna de $e^{-As})$ ,

e a integração de uma função matricial se faz entrada a entrada.

O resultado é: $y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} - \frac{t}{3} + \frac{10}{9} e^{3t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. (a)

(1) • Pontos equilíbrio: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

• Eq. das órbitas:

$$\frac{dx}{dy}=0 \iff x(y)=k \text{ (constante)} \quad \text{(rectas verticais)}$$

• Retrato de fase:

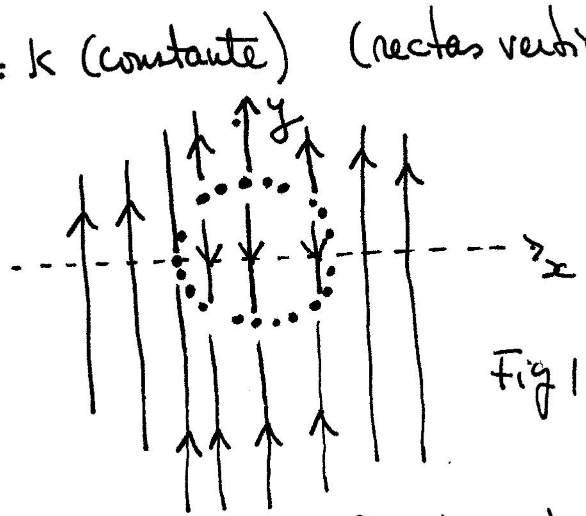

Fig 1

(2) • Pontos equilíbrio: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=1\}\cup\{(0,0)\}$

• Eq. das órbitas

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{-2y} \iff -2y\,dy = x\,dx \Rightarrow -y^2=\frac{x^2}{2}+k$$
(v. separadas)

$$\iff \frac{x^2}{2}+y^2=C \quad \text{(elipses)}$$

• Retrato de fase:

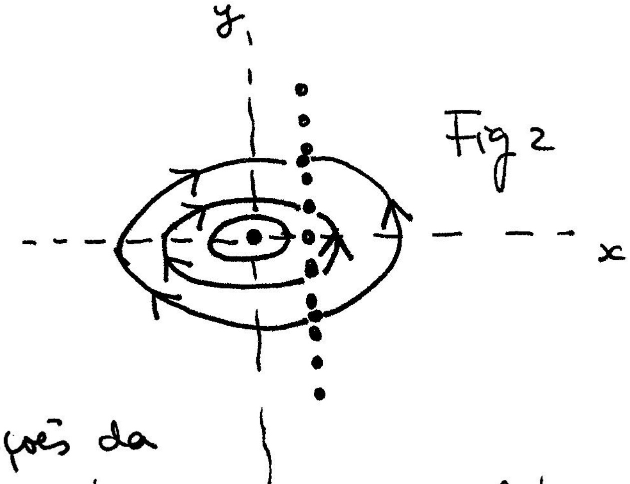

Fig 2

Nota: Embora se diga que as soluções da equaç. das órbitas "são" rectas verticais em (1) e elipses em (2), como os pontos de equilíbrio também são órbitas e órbitas não se intersectam, no retrato de fase não teremos necessariamente rectas e elipses.

(b) (i) Verd. Se não intersectarem pontos de equilíbrio são rectas.
(ii) Falso. Cada ponto da circunf. é uma órbita.
(iii) Falso. Algumas são, mas outras não.