Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Equações diferenciais e modelação

Exame de época normal (Licenciatura em Matemática) 17/01/2011

Duração: 2hora e 30minutos (sem consulta) (A cotação está indicada a azul)

Seja sucinto(a) nas suas respostas, mas não deixe de as justificar.

1. (2.0) Considere a equação diferencial $y' = ty^2$.
   (a) Determine uma família de soluções.
   (b) Determine, caso exista, uma solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$ e diga qual é o seu intervalo de existência.
   (c) Determine, caso exista, uma solução da equação diferencial cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$ e diga qual é o seu intervalo de existência.
   (d) Qual é a solução geral da equação diferencial dada?

2. (1.5) Prove que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

   é homogénea e resolva-a.

3. (2.0)
   (a) Qual é a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n?
   (b) Como classifica uma equação diferencial linear quanto aos coeficientes e quanto ao segundo membro?
   (c) O que é um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea de ordem n?
   (d) Considere a seguinte equação diferencial linear

$$(D^2 - 9)^2(D^2 + 9)^2\, y = 0.$$

   Classifique-a quanto aos coeficientes, quanto ao segundo membro e quanto à ordem e determine um sistema fundamental de soluções.

4. (3.0) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares completas, usando os métodos que achar mais apropriados.
   (a) $y'' - 2y' + y = 2 - e^x$.
   (b) $y'' - 2y' + y = x^{-1}\, e^x$.
   (c) $y'' - 2y' + y = -4 + 2e^x + 3\, x^{-1}\, e^x$.

v.s.f.f.

5. (2.5) Considere o sistema diferencial $y' = Ay$.

   (a) Prove que $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental se e só se $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ e $\det(\Phi(t)) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

   (b) Prove que se $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental, então $e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$

6. (3.0) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Decomponha A na soma de duas matrizes que comutam.

   (b) Calcule e^{At}.

   (c) Determine a solução geral do sistema $y' = Ay$.

   (d) Determine a solução particular do sistema $y' = Ay + b(t)$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = [\ 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\ ]^\top$, onde $b(t) = [\ t \quad 0 \quad \cdots \quad 0\ ]^\top$

7. (3.0) Considere os seguintes sistemas diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 0 \\ y' & = & x^2 + y^2 - 1 \end{array} \right. , \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -2y(x-1) \\ y' & = & x(x-1) \end{array} \right. . \tag{2}$$

   (a) Determine os pontos de equilíbrio e a equação das órbitas e faça um esboço dos retratos de fase destes sistemas

   (b) Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações relativas ao sistema anterior, justificando a sua resposta.

      i. Algumas órbitas do sistema (1) são rectas.

      ii. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 1$ é uma órbita do sistema (1).

      iii. As órbitas do sistema (2) são elipses.

Fim