

**Estatística Computacional**  
(Licenciatura em Matemática)

Duração: 2h

Exame - Resolução

13-06-11

**Observação:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado.

NOME: .....

1. Num estudo sobre o aprisionamento de golfinhos em redes de pesca, obtiveram-se dados relativos ao número de golfinhos aprisionados diariamente em redes de pesca ao largo dos Açores, nos 257 dias de 1998 em que o estado do tempo permitiu a saída de barcos.

a) Apresenta-se seguidamente a tabela de frequências da distribuição do número de golfinhos aprisionados.

**Número de golfinhos aprisionados**

	Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid 0	27	10,5	10,5	10,5
1	40	15,6	15,6	26,1
2	74	28,8	28,8	54,9
3	52	20,2	20,2	75,1
4	33	12,8	12,8	87,9
5	16	6,2	6,2	94,2
6	8	3,1	3,1	97,3
8	3	1,2	1,2	98,4
9	3	1,2	1,2	99,6
13	1	,4	,4	100,0
Total	257	100,0	100,0	

(i) Porque razão os valores da coluna *Percent* coincidem com os da coluna *Valid Percent*?

Porque não há "missings" (não-respostas).

(ii) Qual a percentagem de dias em que ficaram aprisionados mais de 4 golfinhos?

$100\% - 87,9\% = 12,1\%$  (porque 87,9% corresponde à percentagem de dias em que o número de golfinhos aprisionados é inferior ou igual a 4).

Outras respostas possíveis:  $((16+8+3+3+1)/257)*100\%$ ;  $(6,2+3,1+1,2+1,2+0,4)\%$

b) No próximo quadro figuram algumas medidas descritivas obtidas com o software SPSS:

**Statistics**

Número de golfinhos aprisionados

N	Valid	257
	Missing	0
Mean		2,60
Median		2,00
Mode		2
Std. Deviation		1,862
Variance		3,468
Skewness		1,439
Std. Error of Skewness		,152

(i) Descreva a amostra no que diz respeito à localização central e à dispersão.

Localização: em média, ficaram aprisionados 2.6 golfinhos por dia. A mediana é 2 sendo este também o valor mais frequente (moda).

Dispersão: A amostra apresenta um desvio padrão corrigido igual a 1.862 ao qual corresponde uma variância corrigida igual a 3.468.

(ii) Que pode afirmar relativamente à assimetria da amostra?

Como o coeficiente de assimetria é positivo (igual a 1.439) conclui-se que a amostra apresenta assimetria positiva. Esta conclusão também pode ser obtida observando que a média é superior à moda=mediana. Além disso, como

$|\text{Skewness}/\text{Std. Error of Skewness}| = |1.439/0.152| = 9.5$  (aprox.),  
valor este que é muito superior a 2, podemos dizer que a assimetria é considerável.

(iii) As observações 8, 9 e 13 são *outliers*. Se considerar a amostra sem tais observações, que alterações poderão ocorrer nos valores das medidas calculadas em (i)? Não efectue cálculos.

A média, o desvio padrão e a variância vão diminuir, pois são muito influenciados pelos outliers. A mediana é menos influenciada pelos outliers; pode eventualmente diminuir. A moda não sofre alterações.

(iv) Qual é o objectivo do output que figura a seguir? Qual é a conclusão correspondente?

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Número de golfinhos aprisionados
N		257
Poisson Parameter <sup>a, b</sup>	Mean	2,60
Most Extreme Differences	Absolute	,031
	Positive	,031
	Negative	-,022
Kolmogorov-Smirnov Z		,493
Asymp. Sig. (2-tailed)		,968

a. Test distribution is Poisson.  
b. Calculated from data.

O objectivo é testar se a variável aleatória real  $X$ , que representa o número de golfinhos aprisionados diariamente, segue uma lei de Poisson. Mais precisamente, testa-se

$H_0$ :  $X$  segue uma lei de Poisson vs  $H_1$ :  $X$  não segue uma lei de Poisson

Como p-valor aprox.=0.968 é muito superior aos níveis de significância usuais (inf. ou iguais a 0.1), aceita-se  $H_0$ , concluindo-se que  $X$  segue a lei de Poisson de parâmetro 2.6 (o parâmetro da lei de Poisson coincide com o seu valor médio).

2. Foram calculados os valores dos quocientes de inteligência para 72 indivíduos, de ambos os sexos, usando dois tipos de testes, designados **teste A** e **teste B**. Para cada indivíduo registou-se o sexo, o valor do QI obtido com o teste A e o valor do QI obtido com o teste B.

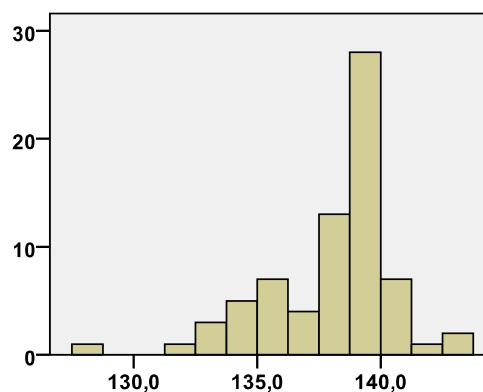
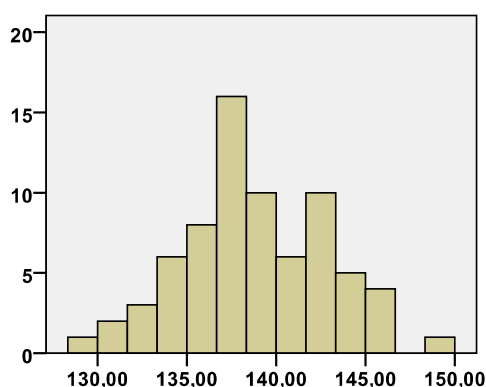
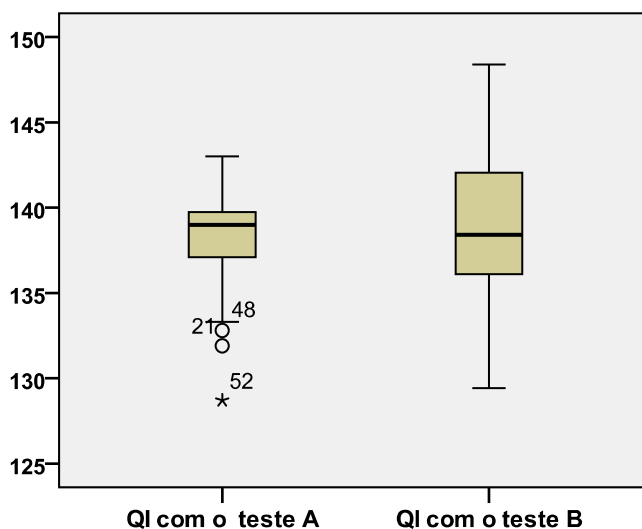
a) No quadro seguinte encontram-se os percentis da distribuição dos resultados do teste A.

		Percentiles						
		5	10	25	50	75	90	95
Weighted Average (Def1)	QI obtido com o teste A	131,76	133,66	135,99	138,41	142,12	144,44	145,64

Indique o terceiro quartil e interprete o seu significado.

O terceiro quartil é igual a 142.12, o que significa que o QI de cerca de 75% dos indivíduos da amostra, calculado com o teste A, é inferior ou igual a 142.12.

b) Observe os *box-plots* paralelos relativos aos resultados dos dois testes e os dois histogramas que se seguem e associe a cada *box-plot* o histograma correspondente.



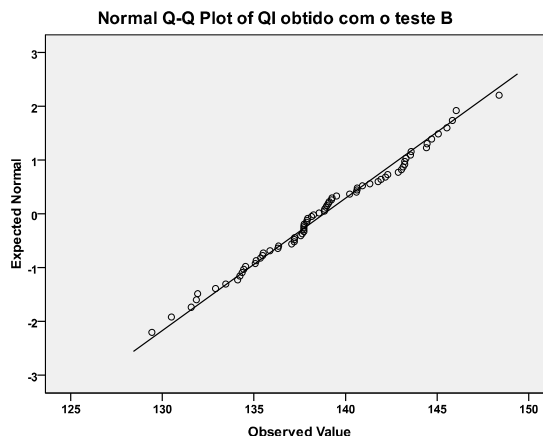
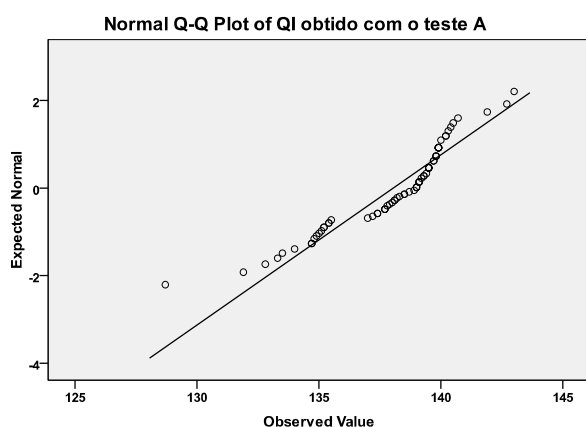
O histograma da esquerda corresponde ao "QI com o teste B", porque ambos os gráficos se afiguram aproximadamente simétricos (o histograma da direita corresponde ao "QI com o teste A").

c) A fim de analisar a adequação da lei normal para modelar a distribuição de probabilidade subjacente a cada uma das amostras observadas, foram traçados papéis de probabilidade normais com parâmetros estimados pelo *software*.

Estimated Distribution Parameters

		QI obtido com o teste A	QI obtido com o teste B
Normal Distribution	Location	138,0417	138,8118
	Scale	2,57374	4,06597

The cases are unweighted.



(i) Quais foram as estimativas utilizadas?

O Q-Q plot correspondente ao teste A foi construído com as estimativas 138.0417 (média da amostra) e 2.57374 (desvio padrão corrigido), respectivamente, para a média e para o desvio padrão da lei normal e o Q-Q plot correspondente ao teste B foi construído com as estimativas 138.8118 (média da amostra) e 4.06597 (desvio padrão corrigido), respectivamente, para a média e para o desvio padrão da lei normal.

(ii) Que comentários pode tecer sobre a qualidade do ajustamento?

O ajustamento à lei normal parece mais adequado no caso do teste B, porque os pontos estão, em geral, muito mais próximos da recta do que no outro caso.

d) Pretende-se testar se o valor médio do QI obtido com o teste A é superior a 139.

(i) Indique a hipótese nula e a hipótese alternativa.

Hipótese nula -  $H_0: m_A = 139$

Hipótese alternativa -  $H_1: m_A > 139$ ,

onde  $m_A = E(X)$ , sendo  $X$  a v.a.r. que representa o valor do QI obtido com o teste A (por qualquer indivíduo da população da qual foi retirada a amostra).

(ii) Considere agora o quadro que se segue, obtido no SPSS.

### One-Sample Test

	Test Value = 139					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
QI obtido com o teste A	-3,159	71	,002	-,9583	-1,563	-,354

Qual a decisão a tomar relativamente às hipóteses consideradas na alínea (i) acima?

Este output corresponde ao teste de  $H_0: m_A = 139$  vs  $H_1: m_A \neq 139$ , cujo p-valor é 0.002. Por outro lado, o valor observado da estatística de teste é negativo ( $t = -0.3159$ ), o que é equivalente a afirmar que  $\bar{x} < 139$  ( $\bar{x}$  representa a média da amostra dos valores do QI obtido com o teste A). Assim, a amostra aponta no sentido contrário ao de  $H_1$ , pelo que o p-valor do teste referente à alínea (i) é  $1 - (0.002/2) = 0.999$ . Este p-valor leva à aceitação de  $H_0$ , por ser muito superior aos níveis de significância usuais (inf. ou iguais a 0.1). Portanto, rejeitamos a hipótese  $H_1$ , concluindo-se que o valor médio do QI obtido com o teste A não pode ser considerado superior a 139.

(iii) Indique um intervalo de confiança para o valor médio do QI obtido com o teste A.

No quadro acima, podemos observar que um i.c. para  $m_A - 139$  com grau de confiança 0.95 é  $]-1.563, -0.354[$ . Como  $-1.563 < m_A - 139 < -0.354$  é equivalente a  $-1.563 + 139 < m_A < -0.354 + 139$ , conclui-se que um i.c. para  $m_A$ , com grau de confiança 0.95, é  $]137.437, 138.646[$ .

e) Para testar se há diferença entre os valores médios dos QI obtidos com os dois testes, considere os dois outputs seguintes.

### Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means			
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference
QI	Equal variances assumed	13,210	,000	-1,358	142	,177	-,7702
	Equal variances not assumed			-1,358	120,026	,177	-,7702

### Paired Samples Test

		Paired Differences	t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean			
Pair 1	QI com o teste A - QI com o teste B	-,77020	-1,621	71	,109

(i) Indique as hipóteses em teste. Qual dos dois outputs é adequado para o efeito pretendido?

As hipóteses em teste são  $H_0: m_A = m_B$  vs  $H_1: m_A \neq m_B$ , com  $m_B$  definido analogamente a  $m_A$ , mas relativamente ao teste B. No entanto, estamos perante amostras emparelhadas (resultados dos teste A e B para o mesmo indivíduo  $i$ ,  $i=1,2,\dots, 72$ ). Nesta situação, aquelas hipóteses escrevem-se habitualmente na forma  $H_0: m_D = 0$  vs  $H_1: m_D \neq 0$ , sendo  $m_D$  o valor médio da v.a.r.  $D=X-Y$  ( $Y$ : v.a. que representa o valor do QI obtido com o teste B).

Os dois outputs correspondem a testes para a diferença  $m_A = m_B$ , mas o segundo output é o adequado para o efeito pretendido, porque os valores médios em teste dizem respeito a amostras emparelhadas, como já foi referido.

(ii) Qual a decisão a tomar ao nível de significância 0.05?

Aceita-se que as médias são iguais, aos níveis de significância usuais (inf. ou iguais a 0.1), uma vez que o p-valor é 0.109 (superior aos referidos níveis de significância).

3. Num determinado ano, a Prevenção Rodoviária Portuguesa (PRP) procedeu à realização de vários estudos, tendo por base os dados recolhidos pela Brigada de Trânsito durante o ano anterior.

A. Relativamente a uma amostra de 40 veículos, observaram-se a taxa de alcoolémia do condutor (expressa em g/l), a sua idade (expressa em anos), a categoria do veículo (pesado ou ligeiro) e o excesso de velocidade (expresso em km/h) com que seguia o veículo.

a) Admita que as populações relativas às taxas de alcoolémia dos condutores dos veículos pesados e dos veículos ligeiros têm a mesma forma.

A fim de averiguar se existem diferenças significativas entre a localização de tais populações, foi efectuado o teste U de Mann-Whitney, que forneceu o seguinte *output*:

Ranks				
Tipo de veículo		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Tax_alco	Ligeiro	18	20,61	371,00
	Pesado	22	20,41	449,00
Total		40		

Test Statistics <sup>b</sup>	
	Tax_alco
Mann-Whitney U	196,000
Wilcoxon W	449,000
Z	-,054
Asymp. Sig. (2-tailed)	,957

b. Grouping Variable: Tipo de veículo

(i) Quais são as hipóteses em confronto?

$H_0: \mu_X = \mu_Y$  vs  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ , onde  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  representam as medianas das v.a.r. X: "taxa de alcoolémia dos condutores de ligeiros" e Y: "taxa de alcoolémia dos condutores de pesados", respectivamente.

(ii) Que conclusão pode tirar, ao nível de significância 0.05?

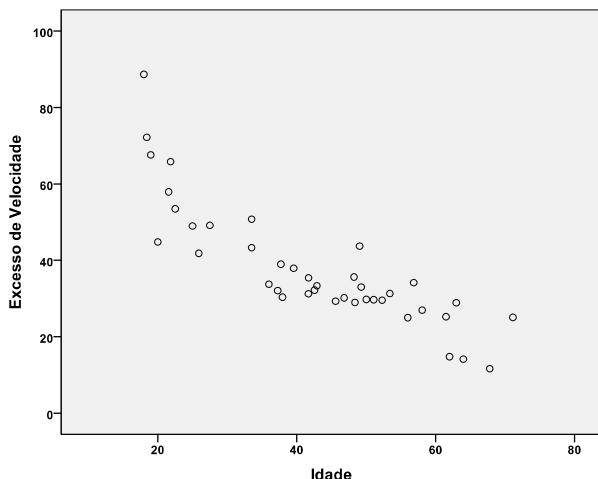
O p-valor aproximado deste teste é  $0.957 > 0.05$ . Assim, aceita-se a igualdade das medianas das duas populações indicadas na alínea anterior.

(iii) Em que condições poderia utilizar, para o mesmo efeito, o teste t (de Student) de comparação de médias?

Poderia utilizar o teste t se as dimensões das duas amostras fossem superiores a 30 ou se pudessem ser consideradas como provenientes de populações normais (ou seja, se fosse possível aceitar a normalidade de X e de Y).

b) Pretende-se também relacionar a idade do condutor com o excesso de velocidade com que seguia o veículo.

Neste sentido, foram construídos o diagrama de dispersão e o quadro que se seguem.



Symmetric Measures

	Value
Interval by Interval Pearson's R	-,855
Ordinal by Ordinal Spearman Correlation	-,890
N of Valid Cases	40

Comente a configuração do gráfico e relacione-a com os valores dos coeficientes de correlação apresentados.

Consideremos as variáveis I: "idade do condutor" e E: "excesso de velocidade com que seguia o veículo". A nuvem de pontos sugere a existência de uma relação funcional entre E e I, relação esta que parece afastar-se um pouco da linearidade. A esta observação corresponde o facto de se ter um valor absoluto do coeficiente de correlação de Spearman superior ao valor absoluto do coeficiente de correlação de Pearson. Por outro lado, trata-se de uma relação decrescente (excessos maiores correspondem a idades menores). Como tal, os coeficientes acima referidos são negativos.

B. Outro aspecto que foi objecto do estudo diz respeito às condições em que ocorreram os acidentes registados. Uma amostra de 500 acidentes envolvendo automóveis ligeiros permitiu obter informações sobre as causas dos acidentes, o dia da semana em que tiveram lugar e as características dos veículos acidentados.

a) A fim de averiguar se a incidência dos acidentes é a mesma nos vários dias da semana, foi efectuado o teste de ajustamento do qui-quadrado, que conduziu aos seguintes resultados:

Codia

	Observed N	Expected N	Residual
Dom	33	71,4	-38,4
Qua	93	71,4	21,6
Qui	59	71,4	-12,4
Sab	32	71,4	-39,4
Seg	97	71,4	25,6
Sex	101	71,4	29,6
Ter	85	71,4	13,6
Total	500		

Test Statistics

	Codia
Chi-Square <sup>a</sup>	75,092
df	6
Asymp. Sig.	,000

a. 0 cells (.0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 71,4.

(i) Indique as hipóteses em confronto.

$H_0: P(A_i) = 1/7, i=1, \dots, 7$  vs  $H_1: P(A_i) \neq 1/7$ , para algum  $i=1, \dots, 7$ , onde  $A_i$  é o acontecimento "o acidente ocorre no  $i$ -ésimo dia da semana".

(ii) Será recomendável tomar uma decisão com base neste output? Admitindo que sim, qual seria a decisão? Sim, porque não há frequências esperadas inferiores a 5. O p-valor é aproximadamente igual a 0 logo é inferior aos níveis de significância usuais (iguais ou superiores a 0.01). Assim, rejeita-se  $H_0$ , concluindo-se que a incidência dos acidentes não é a mesma nos vários dias da semana.

b) Dados oficiais baseados em estudos anteriores indicavam que **20%** dos acidentes se deviam a manobras perigosas. Após várias campanhas de sensibilização junto dos automobilistas, a PRP esperava que esta percentagem tivesse diminuído.

Com base no número de acidentes causados por manobras perigosas na amostra observada, foi efectuado um teste binomial que forneceu o *output* seguinte:

**Binomial Test**

		Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Asymp. Sig. (1-tailed)
Man_Perigosa	Group 1	Não	421	,842	,8	,010(a)
	Group 2	Sim	79	,158		
	Total		500	1,0		

a Based on Z Approximation.

Poderá concluir, ao nível de significância 0.05, que tais campanhas foram bem sucedidas?

Seja  $p$  a proporção de acidentes devidos a manobras perigosas. Pretendemos testar  $H_0: p = 0.2$  vs  $H_1: p < 0.2$  ou, de modo equivalente,  $H_0: 1-p = 0.8$  vs  $H_1: 1-p > 0.8$ . Ora o *output* aqui apresentado diz respeito precisamente a este teste (porque  $1-p$  representa a proporção de acidentes que não são devidos a manobras perigosas). A amostra aponta no sentido de  $H_1$ , porque a proporção observada de acidentes não devidos a manobras perigosas é  $0.842 > 0.8$ . Assim, o p-valor do teste que se pretende realizar é  $0.01 < 0.05$ , pelo que  $H_0$  é rejeitada, aceitando-se que  $p < 0.2$ . Conclui-se, portanto, que as campanhas foram bem sucedidas.

c) Para cada veículo acidentado, foram ainda observados o **grau do ferimento** do condutor (classificado em Ligeiro, Grave ou Mortal) e a **cilindrada do veículo** (classificada em Baixa, Média ou Alta). A amostra bidimensional obtida encontra-se resumida na seguinte tabela de contingência:

**Grau do ferimento \* Cilindrada Crosstabulation**

Count		Cilindrada			Total
		Alta	Baixa	Média	
Grau do ferimento	Grave	10	70	60	140
	Ligeiro	55	125	120	300
	Mortal	5	25	30	60
Total		70	220	210	500

(i) Qual é a percentagem observada de condutores com ferimentos graves?

$$(140/500)*100\% = 28\%$$

(ii) De entre os condutores que apresentavam ferimentos graves, qual a percentagem dos que conduzia um veículo de alta cilindrada?

$$(10/140)*100\% = 7.1\% \text{ (aprox.)}$$

(iii) O Menu *Crosstabs* do software SPSS permitiu ainda construir o quadro que se segue relativo à relação entre o grau do ferimento do condutor e a cilindrada do veículo.



### Symmetric Measures

		Value
Ordinal by Ordinal	Kendall's tau-b	-,010
	Kendall's tau-c	-,009
	Gamma	-,018
N of Valid Cases		500

Que pode afirmar relativamente à associação entre as referidas variáveis?

As variáveis em causa são ordinais, pelo que as medidas de associação apresentadas são adequadas para este caso. Como os seus valores são todos próximos de zero, conclui-se que não há associação entre o grau do ferimento do condutor e a cilindrada do veículo.

4. Uma equipa de biólogos dedicou-se ao estudo de certa espécie de ursos. Com este objectivo, seleccionou aleatoriamente 44 animais adultos daquela espécie, de entre os que vivem numa determinada reserva natural, e observou-os durante um ano, tendo registado valores de várias variáveis.

Por forma a relacionar o peso de um urso antes da hibernação ( $Y$ , em  $kg$ ) com o perímetro do seu tórax ( $x$ , em  $cm$ ), procedeu-se ao ajustamento de um modelo de regressão linear, tendo sido obtidos os seguintes resultados:

### Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,958 <sup>a</sup>	,919	,917	12,918

a. Predictors: (Constant), Perimtorax

### Coefficients<sup>a</sup>

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-52,155	10,044		-5,193	,000
	Perimtorax	1,758	,081	,958	21,772	,000

a. Dependent Variable: Pesoant

a) Porque é que o modelo de regressão linear é, neste caso, adequado para relacionar  $Y$  com  $x$ ?

Porque o valor do coeficiente de correlação linear (Pearson) é muito próximo de 1 ( $R = 0.958$ ).

b) Obtenha uma estimativa do peso de um urso com 160  $cm$  de perímetro do tórax.

A recta de regressão estimada tem por equação  $y = -52.155 + 1.758 x$ . Para  $x = 160$ , obtém-se

$$y = -52.155 + 1.758 \cdot 160 = 229.125.$$

Portanto, um urso com 160  $cm$  de perímetro do tórax, deverá pesar cerca de 229.125  $kg$ .

c) Quais são as hipóteses dos testes a que se referem os dois p-valores que figuram no segundo quadro?

O modelo de regressão é  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ ,  $i=1, \dots, 44$ , sendo  $\epsilon$  uma v.a.r. centrada. O primeiro p-valor corresponde ao teste de  $H_0: \beta_0 = 0$  vs  $H_1: \beta_0 \neq 0$  e o segundo p-valor corresponde ao teste de  $H_0: \beta_1 = 0$  vs  $H_1: \beta_1 \neq 0$ .