Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Estatística

Duração: 2h 30m　　　　10-09-2003

Observação: 1. A resolução completa das questões inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.
2. Tenha em atenção a nota presente no final do enunciado da prova.

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão n $(n > 1)$ de uma variável aleatória real (v.a.r.) X de valor médio m $(m \in \mathbb{R})$ e desvio padrão σ $(\sigma > 0)$, desconhecidos. Sejam $\overline{X}_n$ e S_n^2, respectivamente, a média e a variância da amostra $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calcule o valor médio de S_n^2.

2. Deduza de S_n^2 um estimador T_n de σ^2 cêntrico.

3. Suponha agora que X é normalmente distribuída.

- **a)** Mostre que $\dfrac{n}{\sigma^2} S_n^2$ segue a lei do χ^2_{n-1} (qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade).
- **b)** Determine o risco quadrático de S_n^2 enquanto estimador de σ^2.
- **c)** Prove que S_n^2 converge em média quadrática para σ^2.
- **d)** Compare, relativamente à função de perda quadrática, os estimadores de σ^2, S_n^2 e T_n.
- **e)** Prove que $(\overline{X}_n, S_n^2)$ é um estimador da máxima verosimilhança de (m, σ^2).
- **f)** Mostre que $(\overline{X}_n, T_n)$ é um estimador de (m, σ^2) cêntrico e convergente em probabilidade.

4. Num sistema de transmissão digital, a informação é representada por sinais eléctricos. Devido a flutuações de voltagem no sistema, a transmissão de tais sinais é sistematicamente afectada por um ruído cuja intensidade é bem descrita por uma v.a.r. X normalmente distribuída com valor médio m e desvio padrão σ. Pretendendo-se verificar se o nível de ruído está dentro de valores considerados aceitáveis, foram analisados 25 sinais escolhidos aleatoriamente de entre os enviados, estando as intensidades dos ruídos que afectaram esses sinais resumidas no quadro seguinte:

Intensidade do ruído (*volts*)	$]-0.6, -0.3]$	$]-0.3, 0]$	$]0, 0.3]$	$]0.3, 0.6]$
nº de sinais	2	12	10	1

- **a)** A partir da amostra observada, determine uma estimativa da máxima verosimilhança de (m, σ).
- **b)** A estimação intervalar da variância de X com base na amostra observada conduziu ao intervalo, de caudas igualmente ponderadas, $]0.0251, 0.099[$. Determine o grau de confiança de tal estimação.
- **c)** Que conclusões pode tirar da alínea anterior sobre a variação da intensidade do ruído que afecta um sinal relativamente ao valor médio dessa intensidade?

v.s.f.f.

d) A estimação intervalar anteriormente realizada permite aceitar, com confiança grande, o valor 0.25 para o desvio padrão de X. Pretende-se agora testar se o valor médio da intensidade do ruído é inferior ao valor considerado ideal de zero *volts*.

(i) Construa um teste, uniformemente mais potente de nível 0.05, que permita decidir entre as hipóteses

$$H_0 : m = 0 \quad \text{contra} \quad H_1 : m < 0,$$

com base numa qualquer amostra de dimensão 25.

(ii) Indique a decisão a que conduz a amostra observada. Qual a probabilidade do erro associado à decisão tomada se o verdadeiro valor de m é -0.2?

$\star\star\star\star$

Observação: Na resolução da sua prova poderá necessitar da seguinte definição:

Sejam $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de v.a.r e U e V duas v.a.r.. Diz-se que a sucessão $(U_n, V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em probabilidade para (U, V), quando $n \to +\infty$, se $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em probabilidade para U e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em probabilidade para V.

Cotação:

1/2	2.0 valores
3	9.5 valores
4	8.5 valores