



Duração: 2h 30m

Observação: A resolução completa das questões inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

I

O tempo que decorre entre dois reabastecimentos consecutivos de combustível em determinada estação de serviço é superior ou igual a um valor fixo a , estritamente positivo, e bem descrito por uma variável aleatória real absolutamente contínua, X , de lei de probabilidade $Q_{(\theta,a)}$, $(\theta, a) \in]0, +\infty[^2$, cuja função densidade é definida por

$$f_{(\theta,a)}(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-a}{\theta}} \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(x).$$

Sabe-se que $E(X) = \theta + a$ e $V(X) = \theta^2$.

Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra aleatória de dimensão n de X , $n \in \mathbb{N}$. Considere as estatísticas \bar{X}_n e $Y_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$, onde \bar{X}_n é a média empírica associada à amostra (X_1, \dots, X_n) , e suponha que se pretende estimar o parâmetro (θ, a) .

1. Indique o modelo estatístico associado à amostra (X_1, \dots, X_n) .
2. Supondo θ conhecido, determine um estimador da máxima verosimilhança do parâmetro a .
3. Sabendo que $(\bar{X}_n - Y_n, Y_n)$ é um estimador da máxima verosimilhança do par (θ, a) , deduza um estimador da máxima verosimilhança para $(E(X), V(X))$.
4. Enuncie e demonstre o resultado que lhe permitiu responder à questão anterior.
5. Mostre que a variável Y_n segue a lei $Q_{(\frac{a}{n}, a)}$.
6. Será Y_n um estimador convergente de a ? Em caso afirmativo, precise o modo, ou modos, de convergência.
7. Deduza da estatística $T_n = \bar{X}_n - Y_n$ um estimador cêntrico do parâmetro (θ, a) .
8. Suponha agora a conhecido e igual a 10.
 - a) Indique, justificando convenientemente, a lei de probabilidade que, para n suficientemente grande, aproxima a verdadeira lei de \bar{X}_n .
 - b) Com o objectivo de testar a hipótese $H_0 : \theta = 3$ contra a hipótese $H_1 : \theta = 1$, ao nível de significância 0.05, foi observada uma amostra de dimensão 100 dos referidos tempos, (x_1, \dots, x_{100}) , com média $\bar{x}_{100} = 12$.
 - (i) Determine a região crítica de um teste de H_0 contra H_1 que seja o mais potente àquele nível.
 - (ii) Indique, com base no teste anteriormente construído e na amostra observada, que tempo decorre em média entre dois reabastecimentos consecutivos. Qual a probabilidade do erro associado à decisão tomada?

II

Pretende-se efectuar um estudo sobre o projecto “Coimbra, Capital Nacional da Cultura 2003” a partir de uma amostra de 100 conimbricenses de ambos os sexos aos quais se perguntou, entre outros aspectos, o número de eventos, Y , a que cada um deles já assistiu no âmbito daquele projecto. Este inquérito conduziu aos resultados que se encontram resumidos no quadro seguinte:

Sexo (X)	Y	0	1	2	3	4	5	6
Masculino		8	9	12	6	3	6	5
Feminino		7	12	15	3	10	1	3

1. Determine a distribuição condicional da variável estatística Y dada a modalidade “sexo feminino” de X .
2. A partir da amostra observada, deduza uma estimativa cêntrica do número médio de eventos a que uma qualquer mulher conimbricense assistiu.
3. A partir da amostra observada, determine um intervalo real que contenha, com uma confiança de 95%, a proporção p , $p \in]0, 1[$, de mulheres conimbricenses que assistiram a mais de 2 eventos.

Cotação:

I - 15.5 valores

II - 4.5 valores