

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Exame de Estatística

Duração: 2h30m

07-09-2006

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

(7.0) **1.** Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra de dimensão n de uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo a lei normal de valor médio m e variância σ^2 , com $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Sejam $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, respectivamente, a média e a variância da amostra.

- a) Prove que (\bar{X}_n, S_n) é o estimador dos momentos de (m, σ) e estabeleça a sua convergência quase certa.
- b) Mostre que o estimador da máxima verosimilhança de (m, σ) coincide com o obtido pelo método dos momentos.
- c) Prove que a v.a.r. $Z_n = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X}_n - m}{S_n}$ é uma variável fulcral que permite determinar um intervalo de confiança para m .

(6.0) **2.** Com o objectivo de avaliar o interesse do lançamento de certa gama de serviços numa região do país, foi solicitado um estudo de mercado a determinada empresa de *marketing*. Uma das variáveis a analisar é o rendimento das famílias daquela região. Os inquéritos efectuados a 100 dessas famílias, escolhidas aleatoriamente, conduziram aos resultados que se encontram resumidos no quadro seguinte.

rendimentos (em 100 euros)]3.5, 4.5[[4.5, 5.5[[5.5, 6.5[[6.5, 7.5[[7.5, 8.5[
frequências	10	23	41	20	6

- a) Com base na amostra observada teste, ao nível de significância 0.05, a normalidade da distribuição dos rendimentos das famílias daquela região.
- b) Supondo verdadeira a hipótese testada anteriormente, obtenha um intervalo real que contenha o verdadeiro valor médio dos referidos rendimentos, com uma confiança de 98% e amplitude mínima. Se, com base na amostra observada, pretendesse um intervalo mais preciso do que o obtido, indique como o conseguiria.

v.s.f.f.

(7.0) 3. Com o objectivo de estudar a existência de uma eventual dependência funcional entre as alturas dos rapazes enquanto crianças e a respectiva altura quando adultos, foram registadas as alturas (x_n, y_n) de, respectivamente, 10 indivíduos aos 4 anos de idade e aos 18 anos de idade. Foi analisada, por meio do *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear da forma $Y_n = ax_n + b + U_n$ ($n = 1, 2, \dots, 10$), com (U_n) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão σ ($\sigma > 0$, desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

Descriptive Statistics			
	Mean	Std. Deviation	N
altura18	1,7920	,04541	10
altura4	1,0440	,02675	10

Correlations			
		altura18	altura4
Pearson Correlation	altura18	1,000	,944
	altura4	,944	1,000
Sig. (1-tailed)	altura18	.	,000
	altura4	,000	.
N	altura18	10	10
	altura4	10	10

a) Indique a média e o coeficiente de correlação da amostra observada. Interprete os valores obtidos.

Nos quadros abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão linear efectuada sobre os dados.

Model		Unstandardized Coefficients	
		B	Std. Error
1	(Constant)	,119	,207
	altura4	1,602	,198

a. Dependent Variable: altura18

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test		
		Unstandardized Residual
N		10
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	,0000000
	Std. Deviation	,01499022
Most Extreme Differences	Absolute	,257
	Positive	,136
	Negative	-,257
Kolmogorov-Smirnov Z		,813
Asymp. Sig. (2-tailed)		,523

a. Test distribution is Normal.
b. Calculated from data.

Além disso a soma dos quadrados dos resíduos da estimação é igual a 0.002.

- b) Que pode afirmar sobre a adequação, aos dados observados, do modelo estocástico considerado?
- c) Indique a altura estimada de um jovem de 18 anos que na idade dos 4 anos media 1.1 metros.
- d) Mostre que a amostra observada permite concluir, ao nível de significância 0.02, que o coeficiente a é significativamente diferente de zero.
