

## Exame de Estatística

Duração: 2h 30m

13-06-2006

**Observação:** A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

- (10.0) **1.** Num sistema de serviço de clientes com três postos de atendimento em série o tempo de serviço (em minutos) por cliente é bem descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.)  $X$  seguindo uma lei gama de densidade

$$f_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda x} x^2 \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x).$$

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra de dimensão  $n$  de  $X$ .

- a) Usando o método de estimação dos momentos, determine um estimador  $T_n$  de  $\lambda$  e mostre que tal estimador é convergente quase certamente.
- b) Conclua que  $T_n$  é também o estimador de  $\lambda$  da máxima verosimilhança.
- c) Deduza das alíneas anteriores que a média da amostra,  $\bar{X}_n$ , é o estimador dos momentos e da máxima verosimilhança da duração média do tempo de serviço e indique as suas propriedades.
- d) Mostre que  $\bar{X}_n$  segue uma lei gama, precisando o seu parâmetro.
- e) O referido serviço assume perante os seus clientes que a duração média de atendimento é de cerca de 30 minutos. Esta informação é fortemente contestada pelos clientes que afirmam ser tal duração bastante superior. Com vista a tirar conclusões mais objectivas, recolheu-se uma amostra de 20 tempos de serviço,  $(x_1, x_2, \dots, x_{20})$ , cuja média foi de 39 minutos. Com base na amostra observada poderá concluir que a referida duração média é significativamente superior aos 30 minutos assumidos pelo serviço?

**Nota:** Considere que  $F(39) = 0.985$ , onde  $F$  é a função de distribuição da lei  $\gamma(60, 2)$ .

- (3.5) **2.** No quadro abaixo estão resumidos 150 valores de uma v.a.r. gerada, de acordo com certo *software* estatístico, segundo a lei binomial  $B(5, 0.25)$ .

Valor obtido	0	1	2	3	4	5
Nº de ocorrências	38	46	44	21	1	0

Poderá concluir, ao nível de significância 0.01, que os dados observados são compatíveis com a lei escolhida no *software*?

v.s.f.f.

(6.5) 3. Para estudar a influência de um preparado de insulina,  $\mathbf{x}$ , na redução do nível de açúcar,  $Y$ , foi feita uma experiência em 30 cobaias saudáveis, tendo-se registado para cada valor  $x_n$  de  $\mathbf{x}$  a correspondente redução de açúcar  $y_n$  de  $Y$ . Foi analisada, por meio do *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear da forma  $Y_n = ax_n + b + U_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 30$ ), com  $(U_n)$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ , desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

	Mean	Std. Deviation	N
nivel	47.37	10.287	30
insulina	35.53	8.874	30

		nivel	insulina
Pearson Correlation	nivel	1.000	.877
	insulina	.877	1.000
Sig. (1-tailed)	nivel	.	.000
	insulina	.000	.
N	nivel	30	30
	insulina	30	30

a) Indique a média e o coeficiente de correlação da amostra observada. Que pode concluir sobre a existência de uma dependência funcional linear entre as variáveis em estudo?

Nos quadros abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão linear efectuada sobre os dados.

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	11.247	3.854		2.918	.007	3.352	19.143
	insulina	1.016	.105	.877	9.649	.000	.801	1.232

a. Dependent Variable: nivel

		Unstandardized Residual
N		30
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	.000000
	Std. Deviation	4.94642100
Most Extreme Differences	Absolute	.095
	Positive	.095
	Negative	-.065
Kolmogorov-Smirnov Z		.522
Asymp. Sig. (2-tailed)		.948

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

- b) Indique a relação linear estimada e tire conclusões sobre a adequação, aos dados observados, do modelo estocástico considerado.
- c) Indique intervalos de confiança para os coeficientes do modelo. Permitirá a amostra concluir que o coeficiente  $a$  é significativamente diferente de zero?
- d) Com base nos resultados obtidos e sabendo ainda que a soma dos quadrados dos resíduos da estimação é igual a 709.545, construa um intervalo de confiança a 95% para o valor previsto de redução de açúcar quando a quantidade do preparado de insulina é de 55 unidades.