

Exame de Estatística

Duração: 2h 30m

10-07-2006

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. O rendimento em unidades monetárias (u.m.) relativo aos créditos concedidos diariamente por determinada agência bancária é descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo a lei de Pareto de parâmetro β ($\beta > 0$) de densidade

$$f_{\beta}(x) = \frac{3\beta^3}{x^4} \mathbb{I}_{[\beta, +\infty[}(x).$$

Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra de dimensão n de X .

- a) Usando o método de estimação dos momentos, determine um estimador $\hat{\beta}_n$ de β e obtenha a sua variância.
- b) Mostre que $\hat{\beta}_n$ é cêntrico e convergente, precisando os modos de convergência.
- c) Prove que $T_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ é um estimador da máxima verosimilhança de β .
- d) Deduza que $U_n = \frac{T_n}{\beta}$ é uma variável fulcral para β de função de distribuição

$$F_{U_n}(y) = \left(1 - \frac{1}{y^{3n}}\right) \mathbb{I}_{[1, +\infty[}(y).$$

- e) Suponha que durante 100 dias escolhidos aleatoriamente os rendimentos de tais créditos foram no mínimo de 5 u.m.. Obtenha, com uma confiança de 95%, um intervalo real de iguais caudas que inclua o verdadeiro valor médio dos referidos rendimentos.
2. A evaporação dos solventes que se usam nas tintas depende da humidade ambiente. O conhecimento da correspondente relação de dependência poderá ser útil para melhorar a qualidade da operação de pintura e reduzir os seus custos. Com o objectivo de estudar tal dependência foram observados em simultâneo 52 valores da humidade relativa ambiente, \mathbf{x} (em percentagem), e da quantidade de certo solvente evaporado durante a pintura, Y (em percentagem do seu peso).

Designadamente foi analisada, com recurso ao *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear entre \mathbf{x} e Y da forma $Y_n = ax_n + b + U_n$ ($n = 1, 2, \dots, 52$), com (U_n) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão σ ($\sigma > 0$, desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

Descriptive Statistics			
	Mean	Std. Deviation	N
solvente	6,1617	2,46344	52
humidade	52,6827	3,57007	52

Correlations			
		solvente	humidade
Pearson Correlation	solvente	1,000	-,934
	humidade	-,934	1,000
Sig. (1-tailed)	solvente	.	,000
	humidade	,000	.
N	solvente	52	52
	humidade	52	52

- a) Indique a média e o coeficiente de correlação da amostra observada. Interprete os valores obtidos.

- b) No quadro abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão efectuada sobre os dados.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	40,113	1,842		21,782	,000	36,414	43,812
	humidade	-,644	,035	-,934	-18,478	,000	-,715	-,574

^a. Dependent Variable: solvente

- (i) Indique a relação linear estimada bem como os intervalos de confiança para os coeficientes do modelo.
- (ii) Permitirá a amostra observada concluir que o coeficiente a é significativamente diferente de zero?
- c) No quadro seguinte estão classificados os valores dos resíduos resultantes da estimação efectuada.

Resíduos] - 2.0, -0.6[[-0.6, 0[[0, 0.6[[0.6, 2.0[
Frequência	14	12	13	13

Além disso, a soma dos quadrados de tais resíduos é igual a 39.535.

- (i) Poderá concluir, ao nível de significância 0.05, que os resíduos observados são compatíveis com a hipótese de normalidade feita sobre a lei de U_n , $n = 1, 2, \dots, 52$?
- (ii) Com vista a avaliar o verdadeiro valor de σ e supondo verdadeira a hipótese testada na alínea anterior, teste as hipóteses

$$H_0 : \sigma = 1 \text{ contra } H_1 : \sigma < 1,$$

limitando a 0.05 a probabilidade de aceitar erradamente a hipótese alternativa. Indique a decisão a que conduzem os resultados observados.

Cotação:

1. - 10 valores
2. - 10 valores