

Exame de Estatística

Duração: 2h 30m

09-07-2007

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

(12.0) **I** - No âmbito de uma auditoria Internacional a uma Agência Governamental, tentou verificar-se a fiabilidade do Índice de Preços no Consumidor publicado pela Agência (IPC oficial). Para o efeito, recalculou-se o valor mensal daquele índice ao longo de oito anos seguindo uma metodologia considerada correcta (IPC correcto) com o objectivo de o comparar com o oficial. Os valores Y do IPC oficial correspondentes a tais meses foram registados para cada valor x_n da variável X ($n = 1, 2, \dots, 96$), que descreve o índice calculado pela metodologia correcta.

1. Começou por se efectuar a análise descritiva da variável estatística marginal Y a partir de uma classificação da amostra, em 6 intervalos de igual amplitude, no intervalo de observação $]90, 150]$. Apresenta-se abaixo a tabela de frequências fornecida pelo *software* estatístico SPSS.

	Frequency	Percent	Cumulative Percent
95,00	2	2,1	2,1
105,00	16	16,7	18,8
115,00	29	30,2	49,0
125,00	29	30,2	79,2
135,00	12	12,5	91,7
145,00	8	8,3	100,0
Total	96	100,0	

- Obtenha a função cumulativa desta distribuição estatística.
 - Determine o primeiro e nono decis desta distribuição estatística. Interprete os valores obtidos.
 - Obtenha o coeficiente de variação da variável estatística Y .
2. Foi analisada, por meio do *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear da forma $Y_n = ax_n + b + U_n$ ($n = 1, 2, \dots, 96$), com (U_n) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão σ ($\sigma > 0$, desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

	Mean	Std. Deviation
IPCoficial	120,7515	11,73579
IPCcorrect	125,2792	10,67951

	IPCoficial	IPCcorrect
Pearson Correlation IPCoficial	1,000	,876
IPCcorrect	,876	1,000

- Indique a média e o coeficiente de correlação da amostra observada. Que pode afirmar sobre a relação de dependência existente entre as variáveis em estudo?
- No quadro abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão efectuada sobre os dados.

Model	Unstandardized Coefficients		t	Sig.	95% Confidence Interval for B		
	B	Std. Error			Lower Bound	Upper Bound	
1	(Constant)	,101	6,864	,015	,988	-13,527	13,729
	IPCcorrect	,963	,055	17,642	,000	,855	1,071

a. Dependent Variable: IPCoficial

- Indique a relação linear estimada bem como os intervalos de confiança para os coeficientes do modelo.
- Permitirá a amostra observada concluir que o coeficiente a é significativamente diferente de zero? E quanto ao coeficiente b ?

- c) No quadro seguinte estão classificados os valores dos resíduos resultantes da estimação efectuada.

Resíduos] - 15, -9[[-9, -3[[-3, 3[[3, 9[[9, 15[
Frequência	6	23	37	24	6

Além disso, a soma dos quadrados de tais resíduos é igual a 3035,165.

- (i) Poderá concluir, ao nível de significância 0.05, que os resíduos observados são compatíveis com a hipótese de normalidade feita sobre a lei de U_n , $n = 1, 2, \dots, 96$?
- (ii) Obtenha um intervalo real, de caudas igualmente ponderadas, que contenha o verdadeiro valor de σ com uma confiança de 99%.

- (8.0) **II** - Num processo de controlo de qualidade de determinado tipo de material regista-se o número de peças perfeitas observadas até ocorrer a primeira com defeito. A característica em estudo é descrita por uma v.a.r. X seguindo uma lei geométrica de parâmetro p , isto é, uma lei discreta de função de probabilidade

$$f(x) = p(1 - p)^x \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x),$$

onde $p \in]0, 1[$ é a probabilidade de ocorrência de material com defeito. Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra de dimensão n v.a.r. X .

- Determine um estimador da máxima verosimilhança, T_n , de p e mostre que é quase certamente convergente.
- Deduza que T_n é também o estimador dos momentos de p .
- Mostre que, para n suficientemente grande, a lei de \bar{X}_n é bem aproximada pela lei normal de valor médio $\frac{1-p}{p}$ e variância $\frac{1-p}{np^2}$.
- Suponha que em 100 repetições da situação aleatória em estudo se registaram os seguintes valores de X :

Valores de X	10	15	20	30	60	100	120	150	200
Nº de ocorrências	12	10	10	15	20	15	8	5	5

- a) Com base na amostra observada, obtenha a estimativa da máxima verosimilhança do número de peças que, em média, são observadas até ocorrer a primeira com defeito.
- b) Análises estatísticas anteriores permitiram inferir o valor 50 para aquele valor médio. Correções feitas na cadeia de produção, antes da recolha da amostra considerada acima, levam a supor que tal número possa ter aumentado. Utilize esta amostra para verificar tal facto, limitando a 5% a probabilidade de aceitar erradamente essa decisão.