Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Estatística

Duração: 2h 30m 25-06-2008

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

I - Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão n de uma variável aleatória real (v.a.r) X de lei absolutamente contínua com densidade

$$f_\theta(x) = \theta (1-x)^{\theta-1} \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$$

e valor médio $\frac{1}{\theta+1}$, com θ um real estritamente positivo desconhecido.

1. Mostre que $(Y_1, \ldots, Y_n)$, com $Y_i = -\ln(1-X_i)$, $i = 1, ..., n$, é uma amostra de dimensão n de uma v.a.r. seguindo a lei exponencial de parâmetro θ.

2. Estime, pelo método da máxima verosimilhança, o parâmetro θ e prove que o estimador obtido é quase certamente convergente.

3. Obtenha a lei de $Z_n = \frac{\theta}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ e conclua que Z_n é uma variável fulcral para o modelo estatístico em estudo.

4. Mostre que Z_n permite determinar um intervalo de confiança para θ de grau de confiança dado.

5. Prove que, para n suficientemente grande, Z_n é aproximadamente distribuída de acordo com a lei normal de valor médio 1 e variância $\frac{1}{n}$.

6. Suponha que X representa a proporção de iogurtes fora de prazo retirados diariamente dos *stocks* de certa cadeia de hipermercados. Em 150 dias aleatoriamente escolhidos, a proporção de iogurtes fora de prazo, obtidos em cada dia, conduziu a uma amostra $(x_1, \ldots, x_{150})$ para a qual $\sum_{i=1}^{150} (-\ln(1-x_i)) = 12.5$. Com base nesta amostra, determine um intervalo real que contenha, com uma confiança de 98%, a proporção média diária de iogurtes fora de prazo que são retirados diariamente dos referidos stocks.

I I- Numa fábrica de automóveis existe uma secção destinada à produção de determinado tipo de peças cujo comprimento deverá ser em média de, aproximadamente, 26 *mm*. Além disso, admite-se que o desvio padrão desta característica aleatória é igual a 5 *mm*. A secção de controlo de qualidade da referida fábrica afirma, no entanto, que as peças apresentam, em média, comprimentos superiores aos exigidos. A fim de avaliar a veracidade da afirmação proferida pela secção de controlo de qualidade, é feito um estudo estatístico a partir da amostra, resumida no quadro abaixo, de 200 peças seleccionadas na produção de uma semana.

Comprimentos	$]10, 15]$	$]15, 20]$	$]20, 25]$	$]25, 30]$	$]30, 35]$	$]35, 40]$
Frequências	2	12	44	76	49	17

1. Obtenha a função de frequências acumuladas associada à amostra observada.

2. Determine o primeiro quartil desta distribuição estatística e interprete o resultado obtido.

3. Calcule uma estimativa cêntrica e convergente da média da característica aleatória em estudo.

v.s.f.f.

4. Com o objectivo de testar a normalidade da distribuição subjacente a esta amostra, foi utilizado o teste de ajustamento do χ^2, com base numa certa partição de $\mathbb{R}$ para a qual as frequências esperadas associadas a algumas das classes estão expressos no quadro abaixo

$]-\infty, 20]$	$]20, 25]$	$]25, 30]$	$]30, 35]$	$]35, +\infty[$
14.1		72.7	50.5	16.2

a) Complete o quadro anterior e teste, ao nível de significância 0.01, se a característica em causa segue uma lei normal.

b) Para testar as hipóteses $H_0: \ m = 26$ contra $H_1: \ m > 26$ e admitindo a veracidade da hipótese anteriormente testada, a metodologia de Neyman-Pearson conduziu ao teste de região crítica da forma

$$C = \left\{(x_1, \ldots, x_{200}) \in \mathbb{R}^{200} : \overline{x}_{200} > k\right\},$$

com $k > 0$, a determinar. Utilizando este teste, verifique se a amostra observada permite concluir que as referidas peças estão a ser produzidas com um comprimento significativamente superior aos exigidos 26 mm.

Cotação

I - 12.0 valores
II - 8.0 valores