Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

# Exame de Estatística

**Duração:** 2h 30m 15-07-2008

**Observação:** A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

**I-** Seja $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão $n$ de uma variável aleatória real (v.a.r) $X$ de lei absolutamente contínua com densidade

$$f_a(x) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}(x-a)}\, \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x),$$

com $a \in \mathbb{R}$ desconhecido.

**1.** Mostre que a v.a.r. $Y = X - a$ segue a lei exponencial de valor médio 2.

**2.** Determine o estimador dos momentos do parâmetro $a$, $U_n$, e mostre que é cêntrico e convergente em média quadrática.

**3.** Prove que $V_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ é o estimador da máxima verosimilhança do parâmetro $a$.

**4.** Mostre que a variável $V_n - a$ segue a lei exponencial de valor médio $\frac{2}{n}$.

**5.** Compare, relativamente à função de risco quadrático, os estimadores $U_n$ e $V_n$ do parâmetro $a$.

**6.** Prove que $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - a)$ é variável fulcral para o modelo estatístico em estudo.

**7.** Suponha agora que $X$ descreve o tempo (em minutos) que decorre entre duas chamadas consecutivas de doentes ao Serviço de Urgência de determinado Hospital Central. No quadro abaixo estão resumidas 60 observações dos referidos tempos, que foram recolhidas durante uma semana.

| Tempos | $[4.5, 5]$ | $]5, 5.5]$ | $]5.5, 6]$ | $]6, 6.5]$ | $]6.5, 7]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Frequências | 35 | 17 | 6 | 1 | 1 |

**a)** Obtenha a função de frequências acumuladas associada à amostra observada.

**b)** Determine o valor do percentil 90 desta distribuição estatística e interprete o resultado obtido.

**c)** Com base nesta amostra, e usando a variável fulcral considerada na questão 6, determine um intervalo real que contenha, com uma confiança de 98%, aquele tempo médio.

**Obs.:** Na resolução desta questão poderá necessitar da seguinte informação:
Sendo $F$ a função de distribuição da lei $\chi^2_{120}$, tem-se que

$$F^{-1}(0.01) = 86.92 \ \text{ e } \ F^{-1}(0.99) = 158.95.$$

**v.s.f.f.**

**I I-** Com o objectivo de avaliar a variabilidade do nível de rendimentos das famílias de determinada região relativamente ao seu valor médio, foi efectuado um estudo estatístico a partir de uma amostra de 200 famílias da referida região, para as quais se registaram os correspondentes rendimentos. Foi testado, por meio do *software* estatístico SPSS a compatibilidade da distribuição subjacente aos dados com a normal, bem como o correspondente valor médio. Nos quadros seguintos apresentam-se os resultados obtidos.

**One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test**

| | | Rendimentos |
|---|---|---|
| N | | 200 |
| Normal Parameters[a,b] | Mean | 502,6261 |
| | Std. Deviation | 61,79076 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | ,483 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | ,974 |

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

**One-Sample Test**

| | Test Value = 500 | | |
|---|---|---|---|
| | t | df | Sig. (2-tailed) |
| Rendimentos | ,601 | 199 | ,548 |

1. Com base nestes resultados, que conclusão pode tirar sobre a distribuição dos rendimentos das famílias daquela região. Justifique convenientemente a sua resposta.
2. Designado por $\sigma$ o desvio padrão da lei dos referidos rendimentos, construa um teste que seja o mais potente ao seu nível para testar

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \;\text{ contra }\; H_1 : \sigma = \sigma_1,$$

   com $\sigma_0 < \sigma_1$ e estritamente positivos.
3. Permitirá a amostra observada concluir que a variabilidade em estudo é superior a 55 u.m.?

## Cotação

**I -** 15.0 valores
**II -** 5.0 valores