

Frequência de Estatística

Duração: 1h30m

06/06/2008

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

1. Considere uma amostra aleatória de dimensão n , (X_1, \dots, X_n) , de uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo uma lei de valor médio m e variância σ^2 , com $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.

Considere as estatísticas média e variância da amostra, designadamente, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- a) Mostre que \bar{X}_n converge em média quadrática para m .
- b) Prove que S_n^2 converge quase certamente para σ^2 .
- c) Conclua que (\bar{X}_n, S_n^2) , $n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão convergente em probabilidade e indique o seu limite.
2. A intensidade (segundo a escala de Richter) dos sismos registados numa determinada região é descrita por uma v.a.r. X absolutamente contínua com função densidade de probabilidade definida por

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x - \theta)^2} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x), \theta \in \mathbb{R}.$$

Sabe-se que $E(X) = e^{\theta + \frac{1}{2}}$ e que a v.a.r. $Y = \ln X$ segue a lei normal de média θ e variância 1. Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória de tamanho n de X .

- a) Identifique o modelo estatístico associado a (X_1, X_2, \dots, X_n) .
- b) Prove que $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$ segue a lei normal de média θ e variância $\frac{1}{n}$.
- c) Verifique que T_n é um estimador de θ , centrado e convergente em média quadrática.
- d) Determine um estimador de máxima verosimilhança para θ .
- e) Deduza um estimador de máxima verosimilhança para o valor médio de X .
- f) No quadro seguinte apresenta-se uma amostra particular de X de tamanho 10:

intensidade dos sismos]1, 2]]2, 3]]3, 4]]4, 5]
frequências absolutas	3	4	2	1

- (i) Determine, justificando convenientemente, uma estimativa centrada de θ .
- (ii) Usando a amostra observada, poderá concluir que θ é superior a 0.85?
- (iii) Com base na questão anterior, que pode afirmar sobre a intensidade média dos sismos que ocorrem naquela região?