

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Teste de Estatística

Duração: 25m

18-04-2008

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

Numa sondagem de opinião para avaliar a eventual concordância da população com determinada medida governamental, regista-se o número de indivíduos interrogados que concordam com tal medida até ocorrer o primeiro que discorda dela. Sabendo que os inquéritos são efectuados de modo independente e sempre nas mesmas condições, a variável aleatória real (v.a.r.) X que descreve aquele número aleatório segue a lei geométrica de parâmetro p , cuja função de probabilidade é dada por

$$f_p(x) = p(1-p)^x \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x), \text{ com } p \in]0, 1[\text{ desconhecido.}$$

Com o objectivo de estimar p , considere uma amostra aleatória de dimensão n de X , (X_1, X_2, \dots, X_n) . Considere as estatísticas média e a variância da amostra designadas, respectivamente, por \bar{X}_n e S_n^2 .

1. Defina o modelo estatístico associado a este estudo.
2. Determine a lei de probabilidade da estatística $T_n = n \bar{X}_n$.
3. Deduza da alínea anterior que, para n suficientemente grande, a lei binomial negativa é bem aproximada por uma lei normal e identifique os respectivos parâmetros.
4. Indique o valor médio da estatística (\bar{X}_n, S_n^2) e defina a função do parâmetro p da qual (\bar{X}_n, S_n^2) é um estimador cêntrico.
5. Obtenha um estimador dos momentos de p e mostre que é quase certamente convergente.
