

Frequência de Estatística

Duração: 1h 45m

19-12-2008

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

I. Considere uma amostra aleatória de dimensão n ($n > 1$), (X_1, \dots, X_n) , de uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo uma lei normal de valor médio m e variância σ^2 , com $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Sejam, respectivamente, S_n^2 e \widehat{S}_n^2 a variância e a variância corrigida da amostra.

1. Indique a lei da v.a.r. $U_n = \frac{n}{\sigma^2} S_n^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \widehat{S}_n^2$.
2. Deduza um estimador cêntrico e convergente em média quadrática de σ^2 .
3. Compare, relativamente à função de risco quadrático, os estimadores S_n^2 e \widehat{S}_n^2 de σ^2 .
4. Que pode concluir quanto à admissibilidade de \widehat{S}_n^2 enquanto estimador de σ^2 ?

II. O volume de crédito (em milhões de euros), concedido semanalmente por determinada entidade bancária, é uma v.a.r. X de função de distribuição F_θ com densidade de probabilidade dada por

$$f_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde θ é um parâmetro real estritamente positivo, desconhecido. Além disso,

$$F_\theta(x) = (1 - \theta x e^{-\theta x} - e^{-\theta x}) \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(x), \quad E(X) = \frac{2}{\theta} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{2}{\theta^2}.$$

Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra aleatória de dimensão n de X de média \bar{X}_n .

1. Identifique o modelo estatístico associado a (X_1, X_2, \dots, X_n) .
2. Determine um estimador da máxima verosimilhança do parâmetro da população em estudo.
3. Sabe-se que o volume de crédito concedido semanalmente por tal entidade bancária atingiu nos últimos dois meses os seguintes valores:

$$(40, 50, 85, 35, 70, 55, 60, 45, 40).$$

Com base nesta amostra, calcule a estimativa da máxima verosimilhança da probabilidade daquele volume de crédito ultrapassar 40 milhões de euros. Interprete o resultado obtido.

4. Obtenha, justificando convenientemente, a lei limite da sucessão de variáveis aleatórias reais $(\sqrt{n}(\theta \bar{X}_n - 2))_{n \in \mathbb{N}}$, quando $n \rightarrow +\infty$.
5. Construa um teste que lhe permita decidir entre as hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad \text{com} \quad \theta_1 > \theta_0 \quad \text{arbitrariamente fixo.}$$

6. Estudos anteriormente realizados permitiram concluir que o valor médio daquele volume de crédito semanal é de 60 milhões de euros. Observações mais recentes parecem indicar que tal valor tem vindo a baixar. Com base numa amostra de dimensão 52, observada durante os últimos 12 meses, de média 58 milhões de euros, conclua, ao nível de significância 0.05, se o valor médio daquele volume de crédito semanal é agora inferior aos referidos 60 milhões de euros.

Cotação:

I -	4.5
II -	9.5