Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teste de Estatística

Duração: 45m 19-11-08

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

O rendimento relativo aos créditos concedidos diariamente por determinada agência bancária é bem descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo a lei de Pareto de parâmetro β ($\beta > 1$), isto é, a lei absolutamente contínua de densidade

$$f(x) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}_{]1,+\infty[}(x).$$

Considere uma amostra aleatória de dimensão n de X, $(X_1, ..., X_n)$.

1. Mostre que os logaritmos de tais rendimentos diários, isto é $Y = \ln X$, são bem descritos por uma v.a.r. seguindo a lei exponencial de parâmetro β.

2. Mostre que o estimador da máxima verosimilhança (e.m.v.) de $\frac{1}{\beta}$ é $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$.

3. Prove que U_n é cêntrico e deduza a sua função de risco quadrático.

4. Determine o e.m.v. do rendimento médio concedido diariamente por aquela agência bancária e prove que é quase certamente convergente.

5. Sabe-se que os rendimentos dos créditos concedidos diariamente por tal agência bancária atingiram nas duas últimas semanas os seguintes valores:

$$(1.07, 2.41, 1.19, 1.18, 1.87, 7.79, 1.20, 1.32, 1.04, 2.44).$$

   Com base nesta amostra, calcule as estimativas da máxima verosimilhança e dos momentos do rendimento médio dos créditos concedidos diariamente.