Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teste de Estatística

Duração: 45min 24-11-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

O tempo de vida (em anos) de determinado tipo de componentes de um sistema informático é descrito por uma variável aleatória real X seguindo uma lei absolutamente contínua de densidade

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sqrt{x}}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

onde θ é um parâmetro real estritamente positivo, desconhecido. Nestas condições, a variável aleatória real $Y = \sqrt{X}$ segue a lei exponencial de parâmetro $\frac{1}{\theta}$. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão n de X.

1. Mostre que $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i}$ é um estimador de máxima verosimilhança de θ.

2. Verifique que o tempo médio de vida das referidas componentes é igual a $2\theta^2$ e deduza de T_n um estimador de máxima verosimilhança, U_n, de tal tempo médio.

3. Analise a convergência quase-certa do estimador U_n.

4. Prove que $\dfrac{2n}{\theta}\, T_n$ segue a lei do qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade.

5. Com base numa amostra de X de dimensão 10, obtenha um intervalo de confiança, de caudas igualmente ponderadas, que inclua o tempo médio de vida daquelas componentes com probabilidade 0.95.