Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

GEOMETRIA

Exame Final 17.01.2002

Importante: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. (a) Enuncie o axioma da distância (A4) e o axioma da régua graduada (A5).

   (b) Num plano verificando os axiomas A1-A6, enuncie e demonstre o teorema de Pasch.

2. (a) Enuncie o axioma A11 sobre a congruência de triângulos.

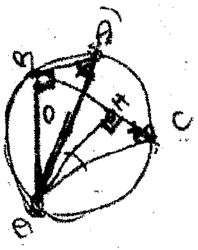
   (b) Num plano verificando os axiomas A1 a A11 enuncie e demonstre o critério ângulo-lado-ângulo (ALA) de congruência de triângulos.

3. Sejam l uma recta do plano euclidiano $\mathcal{E}$ e P e Q dois pontos de $\mathcal{E}$ situados de lados opostos de l. Determine o ponto X de l para o qual $|PX| + |XQ|$ é mínimo.

4. Sejam $\mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência do plano euclidiano e l_1 e l_2 duas rectas distintas, tangentes a $\mathcal{C}(O, r)$ nos pontos P e Q respectivamente. Designe por C_1 e C_2 cada um dos arcos de $\mathcal{C}(O, r)$ cujas extremidades são P e Q. Mostre que, se $\mathrm{m}(C_1) < \mathrm{m}(C_2)$, então l_1 e l_2 intersectam-se, estando o ponto de intersecção do mesmo lado de C_1 relativamente a l_{PQ}

5. Sejam ΔABC um triângulo, $\mathcal{C}$ a circunferência circunscrita a ΔABC e r o raio de $\mathcal{C}$. Mostre que $r = \dfrac{|AB|\,|AC|}{2|AH|}$, onde $\overline{AH}$ é a altura em A de ΔABC.
   Sugestão: Considere os triângulos ΔAHC e $\Delta ABA'$, onde A' é o ponto de $\mathcal{C}$ diametralmente oposto a A.

6. Demonstre o recíproco do teorema de Pitágoras: se para um triângulo do plano euclidiano ΔABC tivermos $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ então ΔABC é rectângulo em A.



(v. s. f. f.)

7. Sejam A e B dois pontos distintos do plano euclidiano $\mathcal{E}$ e C e D dois pontos também distintos de $\mathcal{E}$ situados do mesmo lado de l_{AB} e tais que $\Delta ABC \simeq \Delta BAD$; suponha ainda que $|AC| \not\leq |CB|$.

(a) Mostre que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se intersectam. Designe por P o respectivo ponto de intersecção.

(b) Mostre que ΔABP e ΔCDP são isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ respectivamente.

(c) Mostre que l_{AB} e l_{CD} são paralelas.

(d) Mostre que existe uma reflexão f tal que $f(\Delta ABC) = \Delta BAD$.