Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

GEOMETRIA

Exame Final 7.02.2002

Duração: 2h 30m.

Importante: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. (a) Enuncie os axiomas A7, A8, e A9 sobre a medição de ângulos.

   (b) Num espaço verificando os axiomas A1 a A9 mostre que ângulos verticalmente opostos são congruentes.

2. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos do plano euclidiano, $\overline{AP}$ a mediana em A de ΔABC ($P \in \overline{BC}$) , $\overline{DQ}$ a mediana em D de ΔDEF ($Q \in \overline{EF}$). Mostre que se $\Delta ABP \simeq \Delta DEQ$ então $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$.

3. Demonstre que num triângulo de um plano verificando os axiomas A1 a A11, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e vice-versa, isto é, mostre que num triângulo ΔABC tem-se $|BC| > |AC|$ se e só se $m(\angle A) > m(\angle B)$.

4. Sejam $\mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência do plano euclidiano, P um ponto exterior a $\mathcal{C}(O, r)$ e l_1 e l_2 as rectas tangentes a $\mathcal{C}(O, r)$ que passam em P. Designe por Q_1 e Q_2 os pontos de intersecção de $\mathcal{C}(O, r)$ com l_1 e l_2 respectivamente.

   (a) Mostre que $\Delta PQ_1O \simeq \Delta PQ_2O$.

   (b) Seja S o ponte de intersecção de $\mathcal{C}(O, r)$ com $\overline{OP}$. Mostre que a semirecta Q_1S é a bissectriz do ângulo $\angle PQ_1Q_2$.

5. Enuncie e demonstre o critério LLL de semelhança de triângulos.

6. (a) Defina isometria no plano.

   (b) Mostre que se f for uma isometria no plano $\mathcal{E}$ e ΔABC um triângulo de $\mathcal{E}$ então $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ são não-colineares e $\Delta ABC \simeq \Delta f(A)f(B)f(C)$.

(v. s. f. f.)

7. Sejam ΔABC um triângulo e l a recta que contém as bissectrizes dos ângulos externos de ΔABC com vértice em C.

   (a) Mostre que se ΔABC for isósceles de base $\overline{AB}$ então l e l_{AB} são paralelas.

   (b) Suponha agora que $\mathrm{m}(\angle A) > \mathrm{m}(\angle B)$.

      i. Mostre que l e lAB se intersectam e que o respectivo ponto de intersecção e B estão de lados opostos relativamente a l_{CA}. Designe por P esse ponto de intersecção.

      ii. Seja m a recta paralela a $\overline{BC}$ que passa em A. Designe por Q o ponto de intersecção de m e l (o qual esta do lado oposto a B relativamente a l_{CA}). Mostre que $\Delta PCB \sim \Delta PQA$.

      iii. Mostre que ΔQAC é isósceles de base $\overline{QC}$.

      iv. Conclua que $\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{|CA|}{|CB|}$.