Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Geometria – 1º ano

Exame final
Duração: 2h30m **24 de Janeiro de 2003**

<u>Importante</u>: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. (a) Enuncie o axioma de separação A6.

   (b) Num plano verificando os axiomas A1 a A6 mostre que se uma recta l não passar por um vértice de um triângulo ΔABC então l intersecta no máximo dois lados de ΔABC.

2. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos e M e N os pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, respectivamente.

   (a) Mostre que se $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ então $\overline{AM} \simeq \overline{DN}$.

   (b) Mostre que se $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ e $\overline{AM} \simeq \overline{DN}$ então $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$.

3. Demonstre a desigualdade triangular no caso de três pontos não-colineares: sendo ΔABC um triângulo tem-se $|AB| < |AC| + |CB|$.

4. No plano euclidiano demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180.

5. Sejam $\mathcal{C}(O,r)$ uma circunferência, l_1 e l_2 duas rectas secantes a $\mathcal{C}(O,r)$ que se intersectam num ponto P, interior a $\mathcal{C}(O,r)$. Designe por P_i e Q_i os pontos de intersecção de l_i com $\mathcal{C}(O,r)$. Mostre que $\Delta PP_1P_2 \sim \Delta PQ_2Q_1$.

6. Sejam ΔABC um triângulo do plano euclidiano e $\overline{AQ}$ a bissectriz de ΔABC em A, l a paralela a l_{AC} que passa em B e R o ponto de intersecção de l_{AQ} com l.

   (a) Mostre que R e A estão de lados opostos relativamente a l_{BC}.

   (b) Mostre que $\Delta AQC \sim \Delta RQB$.

   (c) Mostre que ΔAQC é isósceles. ΔABR de Base $\overline{AR}$

   (d) Conclua que $\dfrac{|BQ|}{|CQ|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$.

7. (a) Sendo O um ponto do plano euclidiano e $\alpha \in \mathbb{R}$ defina rotação de centro O e amplitude α.

   (b) Sejam A, B, C, D pontos do plano tais que C e D estão de lados opostos de l_{AB}. Mostre que se $\Delta ABC \simeq \Delta BAD$ então existe uma rotação de amplitude 180 tal que $f(A) = B$, $f(B) = A$ e $f(C) = D$.

(v.s.f.)

8. (a) Sendo $\mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência defina inversão no plano relativamente a $\mathcal{C}(O, r)$.

(b) Seja f a inversão relativamente a uma circunferência $\mathcal{C}(O, r)$. Sendo $\mathcal{C}(P, s)$ uma circunferência que passa por O mostre que $f(\mathcal{C}(P, s)\backslash\{O\})$ é uma recta perpendicular a l_{OP}.