Susana

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

GEOMETRIA - 1.º ano

Exame Final 17.02.2003

Importante: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. Enuncie os axiomas de incidência no plano (A1), (A2) e (A3).

2. (a) Enuncie o axioma A11 sobre a congruência de triângulos.

   (b) Num plano verificando os axiomas A1 a A11 enuncie e demonstre o critério ângulo-lado-ângulo (ALA) de congruência de triângulos.

3. Demonstre que num triângulo de um plano verificando os axiomas A1 a A11, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e vice-versa, isto é, mostre que num triângulo ΔABC tem-se $|BC| > |AC|$ se e só se $\mathrm{m}(\angle A) > \mathrm{m}(\angle B)$.

4. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos do plano euclidiano, $\overline{AP}$ altura de ΔABC em A ($P \in \overline{BC}$) e $\overline{DQ}$ a altura de ΔDEF em D ($Q \in \overline{EF}$).

   (a) Mostre que se $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ então $|AP| = |DQ|$.

   (b) Mostre que se $|AP| = |DQ|$, $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ então $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$.

5. Sejam $\mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência do plano euclidiano e l_1 e l_2 duas rectas distintas, tangentes a $\mathcal{C}(O, r)$ nos pontos P e Q respectivamente. Designe por $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ cada um dos arcos de $\mathcal{C}(O, r)$ cujas extremidades são P e Q. Mostre que, se $\mathrm{m}(\mathcal{C}_1) < \mathrm{m}(\mathcal{C}_2)$, então l_1 e l_2 intersectam-se, estando o ponto de intersecção do mesmo lado de $\mathcal{C}_1$ relativamente a l_{PQ}

6. Sejam ΔABC um triângulo, $\mathcal{C}$ a circunferência circunscrita a ΔABC e r o raio de $\mathcal{C}$. Mostre que $r = \dfrac{|AB|\,|AC|}{2|AH|}$, onde $\overline{AH}$ é a altura em A de ΔABC.
Sugestão: Considere os triângulos ΔAHC e $\Delta ABA'$, onde A' é o ponto de $\mathcal{C}$ diametralmente oposto a A.

(v. s. f. f.)

7. Sejam A e B dois pontos distintos do plano euclidiano $\mathcal{E}$ e C e D dois pontos também distintos de $\mathcal{E}$ situados do mesmo lado de l_{AB} e tais que $\Delta ABC \simeq \Delta BAD$; suponha ainda que $|AC|$ [illegible] $|CB|$.

ACI L

(a) Mostre que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se intersectam. Designe por P o respectivo ponto de intersecção.

(b) Mostre que ΔABP e ΔCDP são isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ respectivamente.

(c) Mostre que l_{AB} e l_{CD} são paralelas.

(d) Mostre que existe uma reflexão f tal que $f(\Delta ABC) = \Delta BAD$.

8. (a) Indique qual (ou quais) axioma do plano euclidiano não se verifica no plano hiperbólico. Que outro axioma se verifica no plano hiperbólico?

(b) indique o que são os "pontos" as "rectas" o "plano" no modelo de Poincaré do plano hiperbólico (não-euclidiano)